Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Comparativo entre os métodos numéricos exatos fatoração Cholesky e método de eliminação de Gauss

Camila Elnatana Ramos dos Santos[1]
Ana Luiza de Araújo[2]
Pedro Vinícius Nascimento de Lima[3]
Matheus da Silva Menezes[4]
Ivan Mezzomo[5]
Departamento de Ciências Exatas, Tecnológicas e Humanas, UFERSA, Campus Angicos, RN

Sistemas de equações lineares (SEL) são amplamente utilizados na resolução de problemas das mais diversas áreas de conhecimento. Com a ampla aplicabilidade dos SEL na resolução de diversos problemas e os mais variados métodos numéricos existentes, acaba tornando-se comum a comparação entre diferentes métodos na escolha do mais adequado para a solução de determinados sistemas. Os métodos numéricos dividem-se em diretos e iterativos. Os métodos diretos nos dariam a solução exata para o SEL se não houvessem os erros de arredondamento, que é o caso da Fatoração Cholesky e do método de eliminação de Gauss.

Esse trabalho tem como objetivo testar e comparar dois diferentes métodos numéricos. Com a implementação da plataforma númerica SCILAB será comparado o desempenho do método de eliminação de Gauss e a Fatoração Cholesky, utilizando 8 matrizes quadradas de ordem variando entre 112 e 729.

Proposição 1 [1]: *Se a matriz A é simétrica, positiva definida, então A pode ser decomposta unicamente no produto GG^t, onde G é a matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos.*

Através de diferentes leis de formação, encontramos todos os elementos da matriz G tal que $GG^t = A$. As fórmulas gerais para os elementos diagonais e não diagonais da matriz G é dada, respectivamente, por:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g_{11} & = & \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} & = & \left(a_{ii} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{1/2} \quad i = 2, \dots, n \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{lcll} g_{i1} & = & \dfrac{a_{i1}}{g_{11}} & i = 2, \dots, n \\ g_{ij} & = & \dfrac{\left(a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} g_{jk} \right)}{g_{jj}} & 2 \leq j < i. \end{array} \right. \tag{1}$$

[1]camilaelnatana@outlook.com
[2]analuh_16@hotmail.com
[3]pedro.vinicius102@hotmail.com
[4]matheus@ufersa.edu.br
[5]imezzomo@ufersa.edu.br

O método de eliminação de Gauss divide-se em duas partes: A primeira, chamada de fase de eliminação, consiste em transformar o sistema dado em um sistema triangular superior através de operações elementares sobre as linhas do sistema original. A segunda, chamada de fase de substituição, consiste em resolver o sistema triangular superior através da retrosubstituição.

Problema: Todos os problemas são compostos por matrizes do tipo real, simétrica e definida positiva. As matrizes foram obtidas através dos repositórios Matrix Market e The University of Florida Sparse Matrix Collection. Os resultados obtidos, o tamanho N de cada matriz e o resíduo dado por $r = \max|Ax - b|$ estão mostrados a seguir.

Problema	N	MEG		Cholesky	
		Tempo (seg)	Resíduo Max	Tempo (seg)	Resíduo Max
BCSSTK03	112	0,197	0	0,836	0
BCSSTK04	132	0,416	0	1,337	0
BCSSTK22	138	0,307	0	1,486	0
NOS1	237	0,834	0	7,121	0
MHD416B	416	3,045	0	37,139	0
BCSSTK20	485	8,267	$1,16 \times 10^{-4}$	58,496	3×10^{-6}
NOS6	675	42,407	0	156,162	0
NOS7	729	91,094	0	197,389	0

Tabela 1: Resultado dos experimentos obtidos para os métodos MEG e Cholesky.

Após serem realizados os testes, os métodos de eliminação de Gauss e fatoração Cholesky encontraram a solução para todos os problemas. Os erros de arredondamentos foram pequenos, ficando entre zero e $1,16 \times 10^{-4}$ para o problema BCSSTK20.

O método de eliminação de Gauss obteve um menor tempo de execução em relação ao método de Cholesky, pois, inerentemente, o MEG realiza apenas uma retrosubstituição, enquanto Cholesky realiza duas vezes este procedimento para resolução de um SEL. Contudo, o método de Cholesky provavelmente levaria vantagem se tivessemos que resolver vários vezes o sistema em que a matriz A é fixa, porém, com diferentes vetores b.

Referências

[1] N. B. Franco. *Cálculo numérico.* Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.

[2] S. Leon. *Álgebra linear com aplicações.* LCT, Rio de Janeiro, 2008.

[3] M. A. G. Ruggiero, V. L. R. Lopes, *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais.* 2 Ed., Pearson, São Paulo, 1997.

