

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# Grafos de aplicações estáveis de 3-variedades fechadas no $\mathbb{R}^3$

Catarina M. de J. Sánchez<sup>1</sup>

Departamento de Matemática, UFV, Viçosa, MG

Nelson B. Humaní<sup>2</sup>

Departamento de Matemática, UFV, Viçosa, MG

**Resumo.** Este trabalho apresenta alguns grafos com pesos associado às aplicações de 3-variedades no  $\mathbb{R}^3$  e um esquema, utilizando grafos, para a construção de aplicações estáveis de 3-variedades fechadas e orientadas no  $\mathbb{R}^3$ , com o conjunto singular pré-determinado.

**Palavras-chave.** Aplicações Estáveis, Conjunto Singular, Grafos com Pesos, 3-esfera.

## 1 Introdução

As aplicação estáveis de uma 3-variedade no  $\mathbb{R}^3$ , localmente podem ser vistas como aplicações do  $\mathbb{R}^3$  no  $\mathbb{R}^3$ . Segundo Whitney [7], o conjunto destas aplicações formam um subconjunto aberto e denso no espaço  $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ . Para cada classe de homotopia de uma aplicação  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  existe uma aplicação estável.

Em [6], Mendes-Oset-Romero introduziram grafos com pesos nos vértices associados às aplicações estáveis de 3-variedades fechadas e orientadas no  $\mathbb{R}^3$ , como um invariante topológico que auxilia na classificação destas aplicações. Dias [1] e Humaní [5] dissertaram sobre este trabalho, detalhando a construção de aplicações associada a um dado grafo.

Neste trabalho apresentamos, de forma resumida, a definição, exemplos e alguns resultados de grafos associados às aplicações estáveis de uma 3-variedade no  $\mathbb{R}^3$ , principalmente para as 3-variedades  $S^3$  e  $S^2 \times S^1$ . O principal objetivo aqui é divulgar a construção desta aplicações (ver Figura 7) que é um paralelo às construções de aplicações estáveis entre superfícies, introduzidas por Hacon-Mendes-Romero em [3, 4].

## 2 Aplicações estáveis de 3-variedades no $\mathbb{R}^3$

Seja  $M$  uma 3-variedade e  $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$  o espaço de todas as aplicações de classe  $C^\infty$  de  $M$  no  $\mathbb{R}^3$ . Duas aplicações  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$  são ditas  $\mathcal{A}$ -equivalentes, quando existem difeomorfismos  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  tais que  $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ . Uma aplicação  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$  é dita *estável*, se todas as aplicações suficientemente próximas de  $f$  (na  $C^\infty$ -topologia de Whitney) são equivalentes a  $f$ . Segundo Whitney [7], o conjunto

---

<sup>1</sup>cmendes@ufv.br

<sup>2</sup>nillxfe@gmail.com

de todas as aplicações estáveis, denotado por  $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ , é aberto e denso no espaço das aplicações suaves  $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ .

Se  $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ , um ponto  $x$  em  $M$  é dito ponto *regular* de  $f$  se a aplicação  $f$  é um difeomorfismo local na vizinhança do ponto  $x$ , caso contrário dizemos que  $x$  é um ponto *singular*. Se  $M$  é uma 3-variedades fechada e orientada, o *conjunto singular* de  $f$ , denotado por  $\Sigma f$ , consiste de uma coleção de superfícies fechadas e orientadas (mergulhadas e disjuntas em  $M$ ) que separa as componentes regulares de  $f$  cujo bordo está em  $\Sigma f$ . Cada superfície consiste de *pontos de dobra* e curvas de *pontos cuspidais*, onde podem existir *pontos de rabo de andorinha* isolados), conforme ilustra a Figura 1. O *conjunto discriminante* de  $f$ , imagem do conjunto singular ( $f(\Sigma f)$ ) e denotado por  $Bf$ , consiste de uma coleção de superfícies fechadas e orientadas imersas em  $\mathbb{R}^3$ , com possíveis interseções transversais e singularidades correspondentes a eixos cuspidais e rabos de andorinha isolados, sendo ambos em número finito.

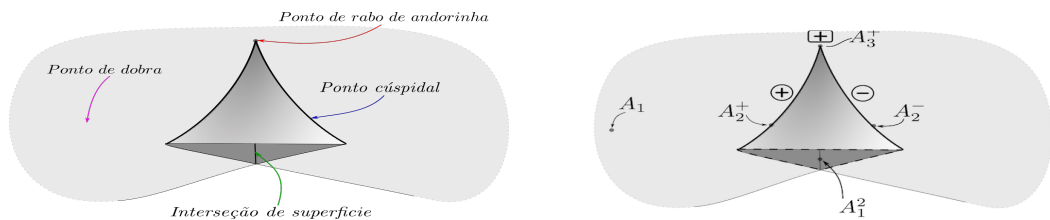


Figura 1: Conjunto de discriminante.

O conjunto de discriminante de  $f$ , denotado por  $Bf = f(\Sigma f)$ , consiste de um conjunto de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , não necessariamente disjuntas (podem ter auto-interseções).

Os germes dos pontos singulares no conjunto de discriminante  $Bf$  são denotadas por:

$A_1$ ; ponto de dobra:  $(x, y, z) \mapsto (x^2, y, z)$ ;

$A_2^\pm$ ; aresta cuspidal, composta por pontos de cúspide:  $(x, y, z) \mapsto (\pm x^3 + yx, y, z)$ ;

$A_3^\pm$ ; ponto rabo de andorinha:  $(x, y, z) \mapsto (\pm x^4 + yx^2 + zx, y, z)$ .

Por outro lado, o conjunto de discriminante  $Bf$  de uma aplicação estável  $f$  pode ter auto-interseções das seguintes formas:

$A_1^2$ ; interseção transversal de duas superfícies dobra (ao longo de curvas regulares);

$A_1^3$ ; pontos triplos isolados, obtidos pela interseção de superfícies dobra;

$A_2^\pm A_1$ ; interseção transversais de aresta cuspidal com uma superfície dobra.

Dois arestas cuspidais de sinais opostos se encontram em um rabo de andorinha, como mostra Figura 1.

As componentes (superfícies) do conjunto singular  $\Sigma f$ , de uma aplicação estável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , separam a 3-variedade  $M$  em regiões conexas, que são as componentes do complemento  $M - \Sigma f$ . Existe uma maneira natural de atribuir sinais  $\pm$  a cada uma das regiões do complemento  $M - \Sigma f$ . Dada uma orientação para a 3-variedade  $M$ , uma região  $R$  do complemento  $M - \Sigma f$  é dita positiva se à aplicação  $f$  preserva a orientação e negativa se  $f$  inverte a orientação.

Denotemos por  $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$  o conjunto das aplicações estáveis de  $M$  em  $\mathbb{R}^3$  e por  $\Delta = C^\infty(M, \mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ . Consideremos uma homotopia  $F : M \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com

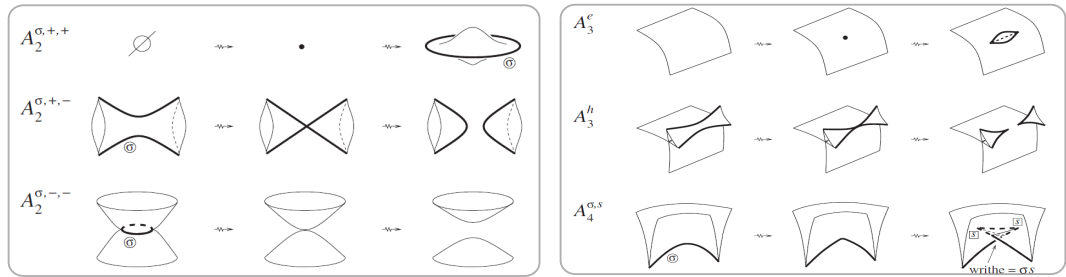


Figura 2: Transições no conjunto discriminante da aplicação.

$(x, t) \rightarrow F(x, t) = F_t(x)$ , entre duas aplicações estáveis  $f, h : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . A medida em que  $t$  varia no intervalo  $[a, b]$  o conjunto discriminante de  $F_a = f$  é deformado no conjunto discriminante de  $F_b = h$ . Pode acontecer que para algum  $t_0 \in [a, b]$  a aplicação  $F_{t_0}$  esteja em  $\Delta$ . Se  $f$  e  $h$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes, então não necessariamente existe um  $t_0 \in [a, b]$  tal que  $F_{t_0} \in \Delta$ . Agora se  $f$  e  $h$  não são  $\mathcal{A}$ -equivalentes, então necessariamente existe pelo menos um  $t_0 \in [a, b]$  tal que  $F_{t_0} \in \Delta$ . As aplicações em  $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$  tem *codimensão zero* dentro do espaço  $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$  e o conjunto discriminante  $\Delta$  é formado pelas aplicações não estáveis de codimensão maior ou igual a 1 (ver [2]). A Figura 2 ilustra algumas das transições de codimensão 1, listadas por Goryunov [2]. As três transições à esquerda alteram a topologia do conjunto singular enquanto que as três transições a direita alteram o número de eixos cuspidais.

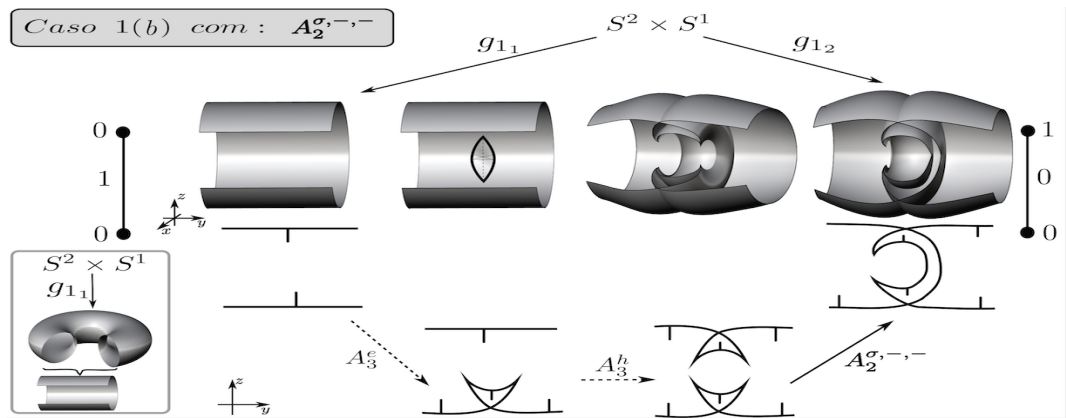


Figura 3: Exemplo de transições que altera peso no vértice e aresta.

As classes de homotopia de  $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$  são conexas por caminhos, logo existe um caminho em  $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$  que conecta duas aplicações em diferentes componentes conexas de cada classe de homotopia que atravessa  $\Delta$ , passando somente por aplicações de codimensão 1, que são chamadas de *transições de codimensão 1*. Estas transições são listadas por Goryunov em [2]. Algumas destas transições estão ilustradas na Figura 2.

### 3 Grafos de aplicações estáveis de 3-variedades no $\mathbb{R}^3$

Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação estável, onde  $M$  é uma 3-variedade fechada e orientada. Como o conjunto singular de  $f$  é um conjunto de superfícies fechadas, definimos o grafo pesado  $\mathcal{G}_f$  associado a aplicação  $f$  da seguinte forma: associamos a cada superfície

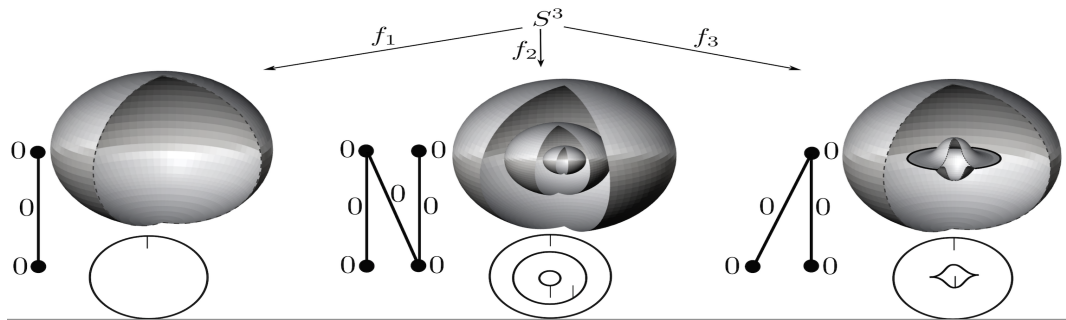


Figura 4: Grafos com pesos iguais a zero associados a aplicações de  $S^3$ .

$S_i$  em  $\Sigma f$  uma aresta e a cada componente regular  $M_j$  de  $M \setminus \Sigma f$  um vértice. Dado um vértice  $v_j$  (correspondente a região  $M_j$ ), definimos seu peso como  $c_j = b_2(M_j) - s_j + 1$ , onde  $s_j$  é o número de componentes conexas do bordo de  $M_j$ . Intuitivamente,  $c_j$  pode ser visto como o número de geradores do segundo grupo de homologia  $H_2(M)$  em  $M_j$ , que não são determinados pelo bordo de  $M_j$ . A cada aresta, associamos o peso dado pelo gênero  $g_i$  da superfície  $S_i$  que ele representa. Como cada região do complemento  $M - \Sigma f$  recebe um sinal  $\pm$ , podemos atribuir sinais aos vértices de  $\mathcal{G}_f$ , onde cada vértice recebe o sinal da região correspondente. Como  $\Sigma f$  separa regiões de sinais opostos, cada aresta de  $\mathcal{G}_f$  conecta vértices de sinais opostos. Com isso,  $\mathcal{G}_f$  é bipartido.

Observe na Figura 2 que as transições que alteram o conjunto singular são:  $A_2^{\sigma,+,+}$ ,  $A_2^{\sigma,+,-}$  e  $A_2^{\sigma,-,-}$ . Consequentemente, são as mesmas transições que alteram o grafo associado ao par  $(M, \Sigma f)$ . Por exemplo, dependendo da orientação do caminho, a singularidade  $A_2^{\sigma,+,+}$  cria (ou remove) uma aresta com peso zero que termina em um vértice de peso zero; as transições  $A_2^{\sigma,+,-}$  ou  $A_2^{\sigma,-,-}$ , adiciona (ou diminui) em 1 o peso da aresta; as transições  $A_2^{\sigma,+,-}$  ou  $A_2^{\sigma,-,-}$  adiciona (ou diminui) em 1 o peso da aresta e o peso do vértice  $c_j$ . Como uma aplicação estável  $f$  pode ser obtida a partir de uma aplicação  $g$  conhecida, passando por transições (aplicações não estáveis) ao longo de um caminho no espaço das aplicações suaves, um grafo realizável pode ser obtido a partir de outro grafo realizável conhecido, passando pelas mesmas transições.

### 4 Cirurgias de aplicações estáveis

Uma aplicação pode ser obtida de aplicações já conhecidas por meio de cirurgias de aplicações estáveis, introduzidas em [6]. Sejam  $P$  e  $Q$  duas regiões contidas numa 3-variedades  $Z$ , e  $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$  duas aplicações estáveis.

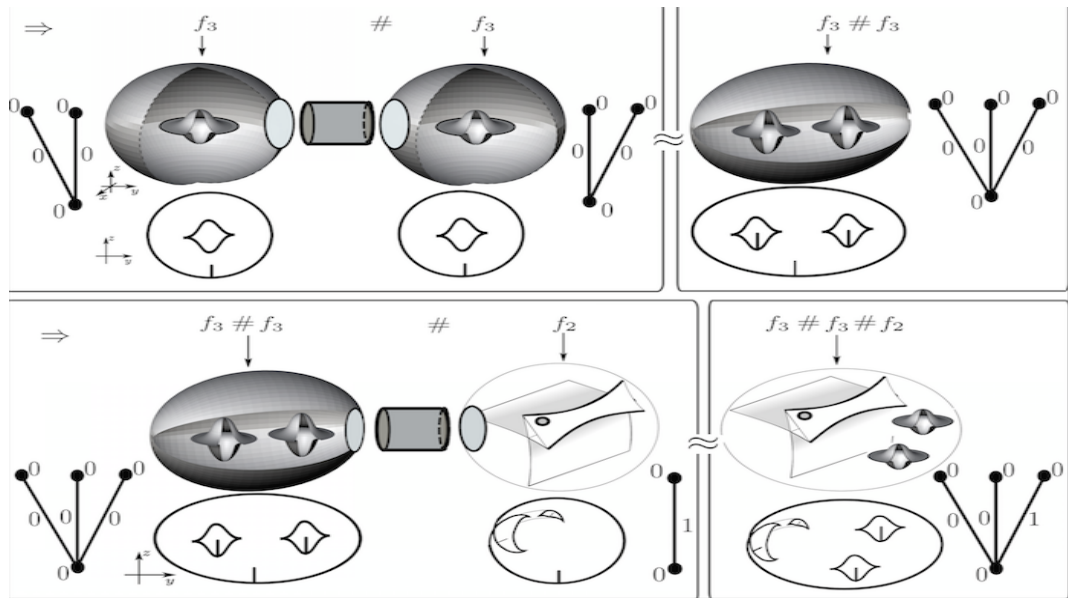


Figura 5: Cirurgia tipo I de aplicações da  $S^3$ .

A **Cirurgia tipo I** entre  $f$  e  $g$ , denotada por  $f +_I g$ , pode ser feita da seguinte forma (ver Figura 5): remova-se duas 3-bolas  $B_1^3$  e  $B_2^3$  em  $P$  e  $Q$ , respetivamente, tais que suas interseções com o conjunto singular de  $f$  e  $g$  são dois discos  $B_1^2$  e  $B_2^2$  de pontos dobra (não interceptam curvas cuspidais ou curvas dobras duplas) e que exista um caminho  $\gamma$  entre  $f(P)$  e  $g(Q)$  que não intercepta os conjuntos discriminantes de  $f$  e  $g$ . Conecte  $P$  e  $Q$  por  $\partial B_1^3$  e  $\partial B_2^3$  através de um tubo  $S^2 \times I$ , unindo por um tubo  $B_1^2$  e  $B_2^2$ . A projeção no  $\mathbb{R}^3$  deste tubo (vizinhança de  $\gamma$ ) não intercepta parte alguma dos conjuntos discriminantes de  $f$  e  $g$ . O conjunto discriminante da aplicação resultante  $f +_I g$  é a soma conexa dos conjuntos de discriminantes de  $f$  e  $g$  e o grafo resultante é uma soma conexa dos grafos, que identifica duas arestas e dois pares de vértices, como ilustra a Figura 5. Por esta cirurgia pode-se construir aplicações que acrescentam pesos nos grafos ou nas arestas.

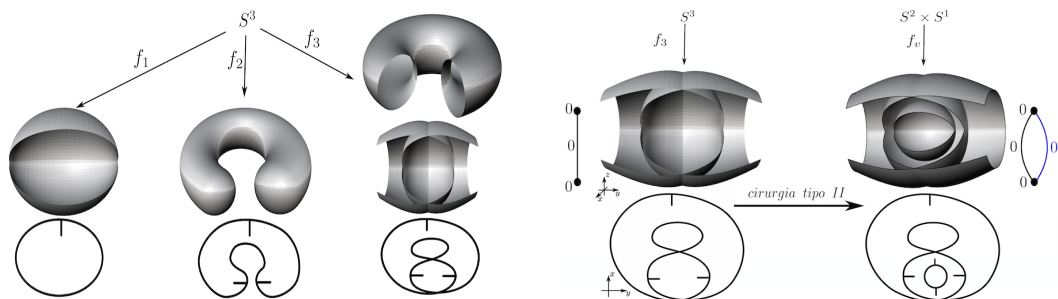


Figura 6: Cirurgia tipo II de aplicações da  $S^3$ .

A **Cirurgia tipo II** entre  $f$  e  $g$ , denotada por  $f +_{II} g$ , pode ser feita da seguinte forma (ver Figura 6): seja  $R^+ \subset P$ , região regular que  $f$  preserva a orientação e  $R^- \subset Q$ , região regular que  $g$  inverte a orientação, tais que  $f(R^+) = g(R^-)$ . Retiramos duas 3-bolas  $B^+ \subset R^+$  e  $B^- \subset R^-$ , sem interseção o bordo das regiões, e tal que  $f(B_1^+) = f(B_2^+)$ . Unimos os bordos de  $P \setminus B_1^+$  e  $Q \setminus B_2^+$  por um tubo  $S^2 \times I$ , e estendemos as aplicações  $f$  e  $g$  sobre este tubo, de forma que imagens coincidam em  $\mathbb{R}^3$  e que tenham como conjunto singular uma superfície  $S_0$ , homeomorfa a  $S^2$ . O conjunto discriminante da aplicação resultante  $f +_{II} g$  é a união dos conjuntos discriminantes de  $f$  e  $g$ , acrescentado de uma superfície  $S^2$  e o grafo resultante é o grafo conexo, a união dos grafos de  $f$  e de  $g$  por uma aresta, como ilustra a Figura 6.

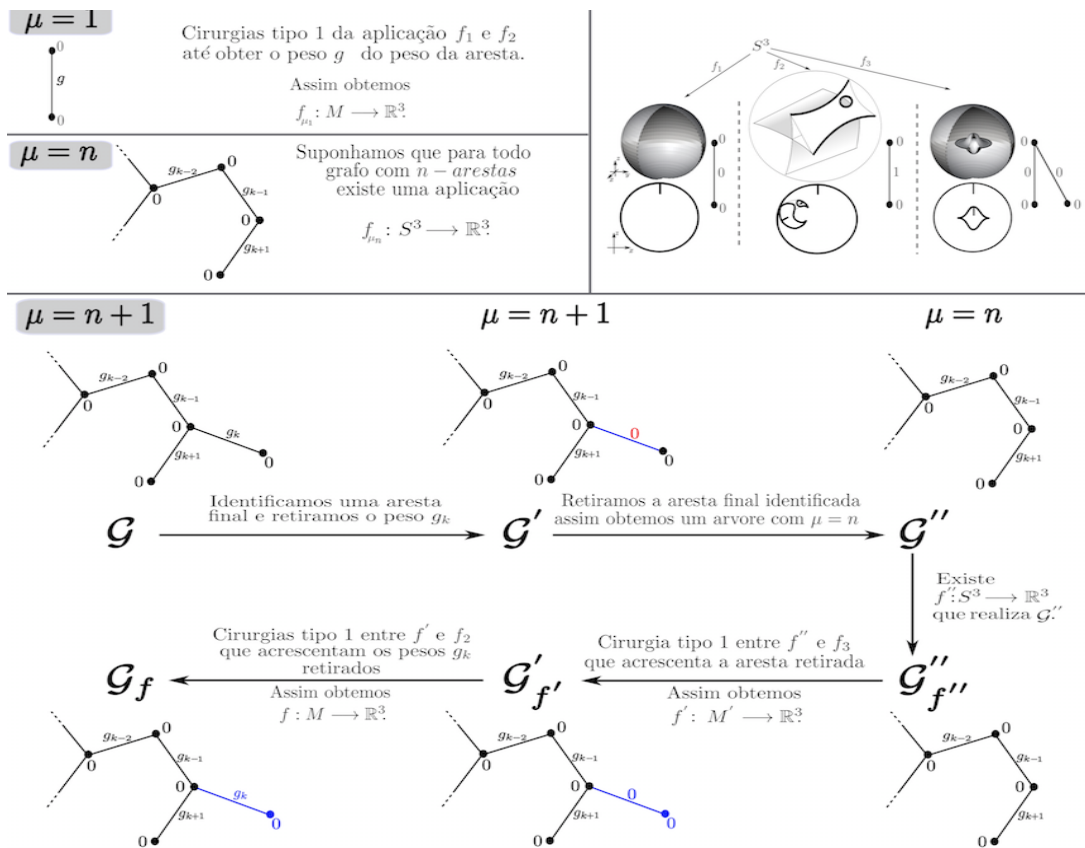


Figura 7: Esquema para realizar grafo associados a aplicações da  $S^3$ .

Seguindo o esquema da Figura 7, aplicando as transições de codimensão 1 e cirurgias tipo I, podemos realizar qualquer árvore, com peso  $c_j = 0, \forall j = 1, \dots, V$ , por uma aplicação estável  $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Para realizar um grafo com ciclos, primeiro removemos uma aresta de cada um dos ciclos para obter um grafo tipo árvore, que pode ser realizada por uma aplicação  $f$  da  $S^3$ , como no esquema acima. Por cirurgias tipo II sobre  $f$ , podemos realizar as arestas retiradas no grafo original, obtendo assim uma aplicação  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  que realiza o grafo

dado. Estas técnicas conduzem aos seguintes resultados provados em [6]:

**Teorema 4.1.** *Todo grafo tipo árvore, com todos os pesos iguais a zero nos vértices e pesos inteiros positivos nas arestas, pode ser realizado por uma aplicação estável  $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .*

**Teorema 4.2.** *Todo grafo com um ciclo, com todos os pesos iguais a zero nos vértices e com pesos inteiros positivos nas arestas, pode ser realizado por uma aplicação estável  $f : S^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .*

**Teorema 4.3.** *Todo grafo com  $k$  ciclos, com todos os pesos iguais a zero nos vértices e com pesos inteiros positivos nas arestas, pode ser realizado por uma aplicação estável de uma 3-variedade fechada e orientada homeomorfa a soma conexas de  $k$   $S^2 \times S^1$ .*

## 5 Conclusões

Este trabalho pode auxiliar o leitor na construção de aplicações estáveis de 3-variedades no  $\mathbb{R}^3$  com um conjunto singular pré-determinado, que em geral não é trivial.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES (Bolsa de Mestrado) e à FAPEMIG (APQ-00715-14).

## Referências

- [1] M. D. S. S. Dias, Classificação de aplicações estáveis através do uso de grafos. Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 2012.
- [2] V. V. Goryunov, Singularities of projections of complete intersections, *J. Soviet Math.* 27: 2785–2811, 1984. DOI: 10.1007/BF01084821.
- [3] D. Hacon, C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data, *Topology and Its Appl.* 154: 166–175, 2007. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2006.04.005>.
- [4] D. Hacon, C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint, *Real and Complex Singularities*. Informa UK Limited, 2003. DOI: 10.1201/9780203912089.ch10.
- [5] N. B. Humaní, Grafos associados às aplicações estáveis de 3-variedades fechadas e orientadas no  $\mathbb{R}^3$ , Dissertação de Mestrado, UFV, 2016.
- [6] C. Mendes de Jesus, R. Oset Sinha. and M. C. Romero Fuster, Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to  $\mathbb{R}^3$ , *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 267: 205–216, 2009. DOI: 10.1134/S0081543809040178.
- [7] H. Whitney, On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. mappings of the plane into the plane, *Ann. of Math.* 62: 374–410, 1955. DOI: 10.1007/978146122972827.