
Teorema de Quine em Teoria de Singularidades

Catarina M. de J. Sánchez¹

Departamento de Matemática, UFV, Viçosa, MG

Gleilson Pereira Marques²

Faculdade de Engenharia, FaEnge/UEMG, João Monlevade, MG

Resumo. Neste trabalho veremos a relação entre conjunto regular, cúspides e grau de uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas, via transições de codimensão 1 e cirurgias de aplicações, que levou a uma nova demonstração do Teorema Global de Quine para aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas.

Palavras-chave. Aplicações Estáveis, Superfícies Fechadas, Teorema de Quine.

1 Introdução

As aplicações estáveis entre duas superfícies fechadas, localmente podem ser vistas como aplicações do plano no plano. Em 1955, Whitney [9] determinou que numa pequena vizinhança do ponto de uma aplicação estável do plano no plano, cada ponto é equivalente a um ponto regular ou um ponto singular do tipo dobra ou cúspide. Whitney também determinou que o conjunto dessas aplicações estáveis formam um subconjunto aberto e denso no espaço de todas as aplicações suaves.

O conjunto singular Σf de uma aplicação estável f entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , consiste de uma coleção de curvas fechadas, disjuntas e mergulhadas sobre M . O conjunto regular, complementar de Σf em M , consiste de uma coleção de superfícies orientadas que tem como bordo as curvas de Σf . A imagem de Σf , conhecida como contorno aparente, consiste de uma coleção de curvas fechadas e imersas sobre N , com possíveis interseções transversais e singularidades correspondentes às cúspides, sendo ambas em número finito.

Em 1978, Quine [8] apresentou um teorema global para aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas, e o demonstrou usando resultados da Teoria de Variedades Diferenciáveis. Este teorema relaciona a soma do grau das cúspides com a característica de Euler do contradomínio e de dois conjuntos da aplicação: M^+ formado pelo fecho das regiões regulares que tem a orientação preservada pela aplicação e, M^- formado pelo fecho das regiões regulares que tem a orientação invertida pela aplicação.

Neste trabalho, apresentaremos alguns resultados obtidos em [5], via transições de codimensão 1 e cirurgias de aplicações estáveis, que levam a uma nova demonstração do teorema de Quine:

¹cmendes@ufv.br

²gleilsonmarques@yahoo.com.br

Teorema 1.1. [8] *Sejam M e N duas 2-variedades suaves, compactas, orientadas e conexas, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável, M^+ o fecho do conjunto dos pontos regulares nos quais f preserva a orientação, M^- o fecho dos pontos regulares nos quais f inverte a orientação e c_1, \dots, c_n pontos de cúspides, então*

$$\chi(M) - 2\chi(M^-) + \sum_{i=1}^n s(c_i) = d(f) \chi(N),$$

onde χ , $s(c_i)$ e $d(f)$ denotam, respectivamente, a característica de Euler, o grau local da cúspide c_i e o grau da aplicação f .

2 Aplicações estáveis entre superfícies

Denotemos por $C^\infty(M, N)$ o espaço de todas as aplicações suaves entre duas superfícies M e N . Duas aplicações $f, g \in C^\infty(M, N)$ são ditas *\mathcal{A} -equivalentes* quando existem difeomorfismos $\phi : M \rightarrow M$ e $\psi : N \rightarrow N$ tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Uma aplicação $f \in C^\infty(M, N)$ é dita *estável* se todas as aplicações suficientemente próximas de f (na C^∞ -topologia de Whitney) são equivalentes a f . Segundo Whitney [9], o conjunto de todas as aplicações estáveis, que denotaremos por $\mathcal{E}(M, N)$, é aberto e denso no espaço das aplicações $C^\infty(M, N)$.

Dada uma aplicação estável $f \in \mathcal{E}(M, N)$, um ponto x em M é dito ponto *regular* de f se a aplicação f é um difeomorfismo local na vizinhança do ponto x , caso contrário dizemos que x é um ponto *singular*. As singularidades locais de f , segundo o Teorema de Whitney [9], são do tipo dobra (com forma local $(x, y) \mapsto (x^2; y)$) ou do tipo cúspides (com forma local $(x, y) \mapsto (xy - x^3, y)$).

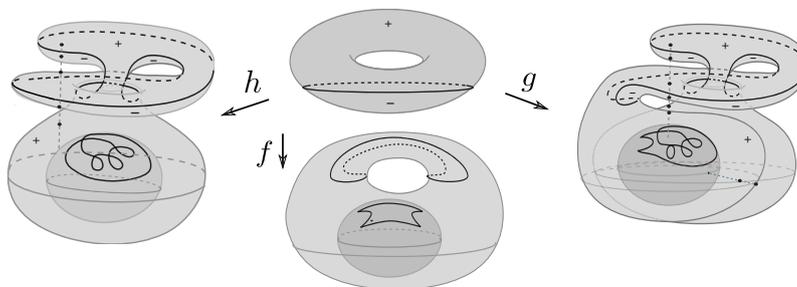


Figura 1: Exemplos de aplicações do toro na esfera.

O conjunto de todos os pontos singulares de f , denotado por Σf , é chamado de *conjunto singular* de f e é formado por um conjunto de curvas simples, disjuntas e mergulhadas em M (subvariedades de codimensão 1 em M). O conjunto de todos os pontos não singulares de f , denotado por $M \setminus \Sigma f$, é chamado de *conjunto regular* e consiste em um número finito de regiões de M que são imersas em N por f . As regiões regulares tem como bordo as curvas de Σf . A imagem dessas curvas singulares, denotado por $Bf = f(\Sigma f)$, é chamada de *contorno aparente* de f (ou conjunto de ramificação) e é formado por curvas suaves em N com um número finito de pontos duplos (interseções transversas) e possíveis pontos de

cúspides. Em [3] foi provado que se M é uma superfície fechada e orientada, o conjunto singular Σf tem E componentes conexas e o conjunto regular $M \setminus \Sigma f$ tem V componentes conexas regulares, então o gênero de M é dado por $g(M) = 1 - V + E + W$, onde W é a soma total dos gêneros das regiões regulares.

Se M é uma superfície orientada, uma região de $M \setminus \Sigma f$ será dita *positiva* se tem a orientação preservada por f ou *negativa* se tem a orientação invertida por f . Neste caso, toda curva de Σf separa uma região regular positiva de uma região regular negativa. Denotaremos por M^+ e M^- , respectivamente, o conjunto de todas as regiões regulares positivas e negativas, por V^\pm o número de componentes regulares de M^\pm , por W^\pm a soma total dos gêneros das componentes de M^\pm e por C^\pm o número de cúspides com grau local ± 1 .

A Figura 1 ilustra três diferentes aplicações do toro na esfera com única curva singular: h é uma aplicação dobra com grau 1 e 4 pontos duplos; f tem grau 1 e 4 cúspides; e g tem grau 2, 4 pontos duplos e 2 cúspides.

3 Transições de codimensão 1 e cirurgias de aplicações

Sejam $f, g : M \rightarrow N$ duas aplicações estáveis na mesma classe de homotopia em $C^\infty(M, N)$, existe um caminho de g à f que passa pelo complemento $C^\infty(M, N) \setminus \mathcal{E}(M, N)$, ou seja, passa por uma aplicação não estável. As deformações locais no contorno aparente, que ocorrem quando um caminho atravessa este complemento, são chamadas de *transições de codimensão 1*. Uma lista com essas deformações foi dada por Ohmoto e Aicardi em [7]. As transições de codimensão 1 que alteram a topologia do conjunto regular e do conjunto singular das aplicações estáveis são as transições *bicos* e *lábios*, as quais estão ilustradas na Figura 2, onde as setas indicam o sentido positivo, ou seja, em que o número de cúspides aumenta por dois. Uma outra transição que altera o número de cúspides é a *rabo de andorinha* (S), conforme Figura 3 item (b), mas essa transição não altera a topologia do conjunto regular.

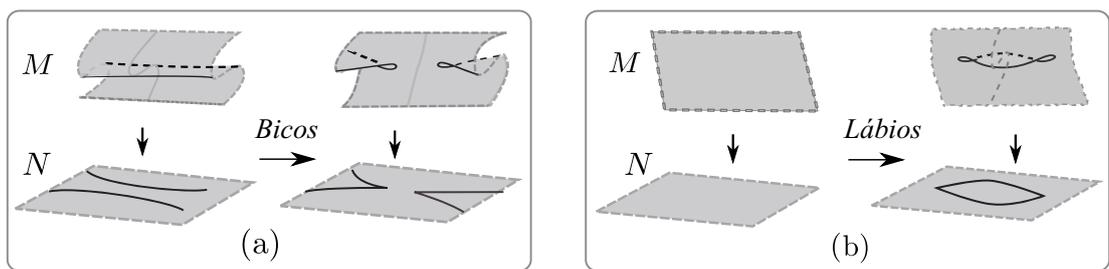


Figura 2: Transições Bicos e Lábios em $C^\infty(M, N)$.

Observe que através das transições de codimensão 1, podemos obter uma aplicação estável a partir de outra inicialmente conhecida e na mesma classe de homotopia. A Figura 3 ilustra uma aplicação estável f da esfera no plano, obtida de uma aplicação g , através de uma transição rabo de andorinha (S), e de uma transição bicos no sentido

negativo ($-B$) (em que o número de cúspides diminui por dois).

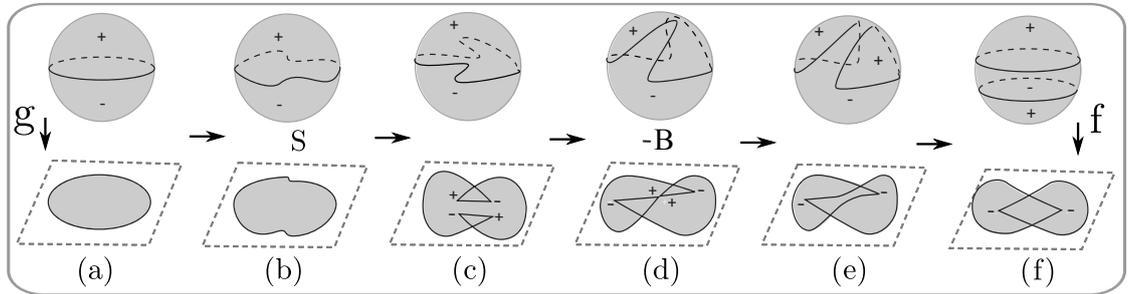


Figura 3: Exemplo de transições rabo de andorinha e bicos em $C^\infty(S^2, \mathbb{R}^2)$.

Um invariante da classe de homotopia de aplicações entre superfícies fechadas e orientadas é o grau da aplicação. Uma forma de construir aplicações estáveis em diferentes classes de homotopia é através dos dois tipos de somas de aplicações, definidas em [2], chamadas de *cirurgia horizontal* e *cirurgia vertical*, ilustradas na Figura 4 itens (a) e (b), respectivamente. Em ambas as cirurgias, remove-se um par de discos disjuntos na superfície de domínio, os quais são substituídos por um tubo limitado (conectando os bordos da superfície) ao longo do qual as aplicações envolvidas são estendidas estavelmente.

Sejam P e Q duas regiões contidas numa superfícies Z , e $f : P \rightarrow N$ e $g : Q \rightarrow N$ duas aplicações estáveis.

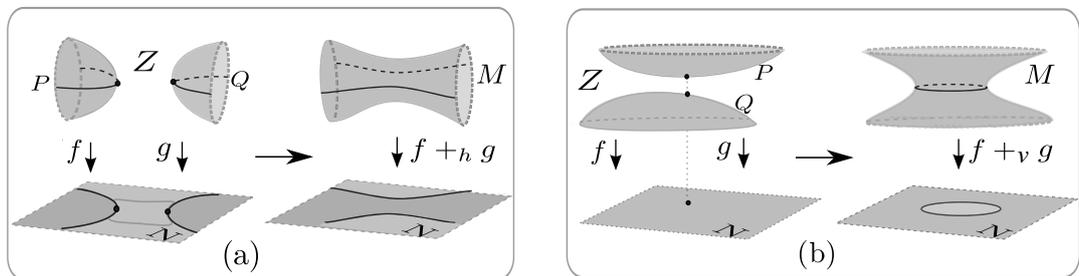


Figura 4: Cirurgias horizontal e vertical.

A *cirurgia horizontal* entre f e g pode ser feita da seguinte forma (ver Figura 4 item (a)): escolhe-se dois arcos $l' = f(l)$ e $j' = g(j)$ nos contornos aparentes Bf e Bg , onde l e j são arcos de dobras contidos, respectivamente, em Σf e Σg , de forma que exista um caminho η entre l' e j' com $\eta \cap (Bf \cup Bg) = \emptyset$; destaca-se dois pequenos discos D_l e D_j , vizinhanças dos arcos l e j , e repassa-se seus interiores por um tubo T , respeitando as orientações em P e Q , obtendo assim uma nova superfície fechada e orientada M ; estendendo a aplicação de forma estável sobre o tubo T , obtém-se a aplicação estável $f +_h g : M \rightarrow N$.

A *cirurgia vertical* entre f e g pode ser feita da seguinte forma (ver Figura 4 item (b)): escolhe-se dois pontos regulares $p \in P$ e $q \in Q$, sendo P e Q com orientações opostas,

tal que $f(p) = g(q)$; destaca-se dois pequenos discos D_p e D_q , vizinhanças de p e q , e repassa-se seus interiores por um tubo T , respeitando as orientações em P e Q , obtendo assim uma nova superfície fechada e orientada M ; estendendo a aplicação de forma estável sobre o tubo T , obtém-se a aplicação estável $f +_v g : M \rightarrow N$.

A Figura 5 ilustra uma sequência de aplicações estáveis no bitoro: em (a) temos a aplicação identidade (grau 1); (b) aplicação do bitoro, com três curvas singulares, que pode ser obtida de (a) por três transições lábios; (c) aplicação do bitoro, com cinco curvas singulares, que pode ser obtida de (b) por duas transições bicos; (d) aplicação do 6-toros, com única curva singular, que pode ser obtida de (c) por quatro cirurgias horizontais; (e) aplicação do 8-toros, com três curvas singulares, que pode ser obtida de (d) por duas cirurgias verticais.

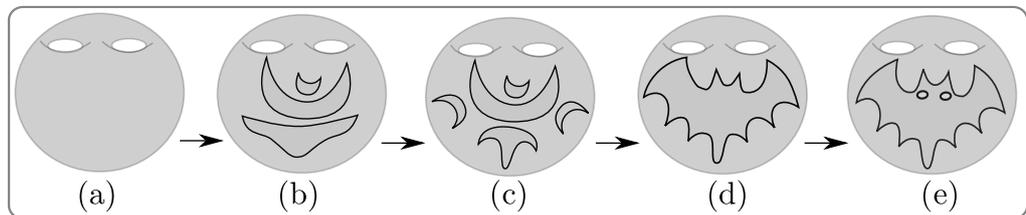


Figura 5: Construção de uma aplicação com grau 1 do 8-toros sobre o bitoro.

Observe que a Figura 5 item (e), também pode ser vista como uma aplicação estável do 10-toros sobre o bitoro, obtida da seguinte forma: considere em (a) três aplicações identidades (grau 1 cada); (b) três aplicações do bitoro, com única curva singular cada, obtidas de (a) por uma transição lábios em cada uma das aplicações; (c) três aplicações do bitoro, obtidas de (b) por duas transições bicos sobre uma das aplicações; (d) aplicação do 8-toros, com única curva singular, obtida de (c) por quatro cirurgias horizontais; (e) aplicação do 10-toros, com três curvas singulares, que pode ser obtida de (d) por duas cirurgias verticais.

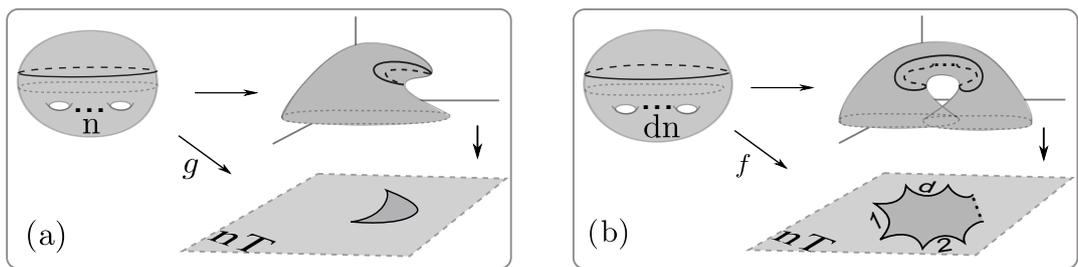


Figura 6: Construção de uma aplicação com grau d do dn -toros sobre o n -toros.

A Figura 6 ilustra duas aplicações no n -toros: em (a) a aplicação tem grau 1, uma curva singular com duas cúspides e pode ser obtida da aplicação identidade passando por uma transição lábios; a aplicação em (b), com grau d e uma curva singular com $2d$ cúspides, pode ser obtida por $d - 1$ cirurgias horizontais entre d aplicações tipo (a).

4 Relação entre os invariantes de aplicações

Sejam M e N duas superfícies fechadas e orientadas e $f, h : M \rightarrow N$ duas aplicações estáveis na mesma classe de homotopia, ou seja, f pode ser obtida de h passando apenas por transições de codimensão 1. O resultado a seguir relaciona, do ponto de vista global, o número de cúspides com a característica de Euler das componentes regulares de aplicações estáveis numa mesma classe de homotopia.

Lema 4.1. *Sejam f e h duas aplicações estáveis na mesma classe de homotopia em $C^\infty(M, N)$. Se h é uma aplicação dobra, então*

$$C^+(f) - C^-(f) = [\chi(M_h^+) - \chi(M_h^-)] - [\chi(M_f^+) - \chi(M_f^-)].$$

Aplicando cirurgias horizontais e verticais sobre aplicações dobra com grau zero e aplicações sem singularidades com grau d , obtêm-se o próximo resultado.

Lema 4.2. *Se $h : M \rightarrow N$ é um aplicação dobra com grau d , entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N , obtida por cirurgias horizontais e verticais, então*

$$\chi(M_h^+) - \chi(M_h^-) = d(h) \chi(N).$$

O próximo resultado é equivalente ao Teorema 1.1 e uma consequência imediata do Lema 4.1 e Lema 4.2. As demonstrações detalhadas destes resultados se encontram em [5] e [6].

Teorema 4.1. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável com grau d , entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N . Então*

$$[\chi(M_f^+) - \chi(M_f^-)] + [C^+(f) - C^-(f)] = d(h) \chi(N),$$

onde χ denota a característica de Euler.

Se considerarmos que as cúspides são positivas, temos que a aplicação f obtida na Figura 4 item b), possui $\chi(M_f^+) - \chi(M_f^-) = -2dn$ e $C^+(f) - C^-(f) = 2d$ o que satisfaz o Teorema 4.1 para todo d , pois $\chi(N) = 2 - 2n$.

5 Conclusões

A prova dada por Quine [8] para o Teorema 1.1, aplica resultados da Teoria de Variiedades Diferenciáveis, enquanto que a demonstração ao seu equivalente, o Teorema 4.1, está baseada no estudo do comportamento topológico dos conjuntos regular e singular de aplicações estáveis, dentro da Teoria de Singularidades

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPEMIG (Bolsa de Mestrado e projeto APQ-00715-14).

Referências

- [1] D. Hacon, C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere. *J. Sing.* 2: 67–80, 2010. DOI: 10.5427/jsing.2010.2e.
- [2] D. Hacon, C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data *Topology and Its Appl.* 154 (1): 166–175, 2007. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2006.04.005>.
- [3] D. Hacon, C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint. *Real and Complex Singularities*. Informa UK Limited, 2003. DOI: 10.1201/9780203912089.ch10.
- [4] C. Mendes de Jesus, Graphs of stable maps between closed orientable surfaces, *Comp. Appl. Math.*, 2016. DOI: 10.1007/s40314-016-0317-9.
- [5] C. Mendes de Jesus, Invariants of maps between closed surfaces, preprint 2015.
- [6] G. P. Marques, Um Teorema Global para Singularidades de Aplicações entre Superfícies, Dissertação de Mestrado, UFV, 2015.
- [7] T. Ohmoto and F. Aicardi, First Order Local Invariants of Apparent Coutours, *Topology*, 45: 27–45, 2006. DOI: 10.1016/j.top.2005.04.005.
- [8] J. R. Quine, A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds, *Trans. AMS*, 236: 307–314, 1978. DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-1978-0474378-X>.
- [9] H. Whitney, On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane, *Ann. of Math.* 62: 374–410, 1955. DOI: 10.1007/978146122972827.