Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Generalização dos Coeficientes Trinomiais

Kênia Cristina Pereira Silva[1]
Instituto Federal de São Paulo-IFSP, Hortolândia/SP
Elen Viviani Pereira Spreafico[2]
Instituto de Matemática-INMA, UFMS, Campo Grande/MS
Cecília Pereira Andrade[3]
Instituto Federal de São Paulo-IFSP, Campinas/SP

Resumo. Este trabalho apresenta uma interpretação combinatória, em termos de partição, para a sequência dos números pares e resultados relacionados a uma generalização dos coeficientes trinomiais.

Palavras-chave. Interpretações combinatórias, Coeficientes trinomiais, Partições.

1 Introdução

Em 1894, L.J Rogers descobriu um par de identidades que, mais tarde, passaram a se chamar Identidades de Rogers-Ramanujan. Durante a primeira metade de Século XX vários matemáticos incluindo Rogers, F.H. Jacson e W. N. Bailey descobriram identidades que, na forma, assemelham-se às de Rogers-Ramanujan. Em sua tese de doutorado, L. J. Slater (aluna de Bailey) apresentou uma lista de 130 identidades do tipo Rogers-Ramanujan. Em 1986 Andrews apresentou um algoritmo através do qual generalizações polinomiais de Identidades do tipo Rogers-Ramanujan podem ser obtidas.

Em [5] foram apresentadas novas interpretações combinatórias para algumas sequências a partir de ideias dadas por Andrews em [2], e resultados dados por Santos em [3]. As sequências interpretadas incluem os números de Fibonacci, os números de Pell e os números de Jacobsthal em termos de partição. Esse trabalho apresenta ainda conjecturas para os termos gerais das sequências e algumas identidades provadas bijetivamente. No cálculo da fórmula para o termo geral da sequência encontrada usando o Método de Andrews com $f_{23}(-q,t)$, um novo instrumento de contagem foi encontrado, que difere do coeficiente trinomial por não ter a variação de sinal. Foi apresentada em [7], uma interpretação em termos de caminho reticulado para tal coeficiente, nosso objetivo é apresentar resultados relacionados a esta generalização dos coeficientes trinomiais.

[1]kenia@ifsp.edu.br,
[2]elen.spreafico@ufms.br
[3]cecilia.andrade@ifsp.edu.br

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0235 © 2017 SBMAC

2 Definições

Uma ***partição*** de um inteiro n é uma sequência não crescente de inteiros positivos $(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_k)$, tal que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$.

Notação de q-séries:

$$(a)_n = (a;q)_n = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(1-aq^j)}{(1-aq^{j+n})} = (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}), \tag{1}$$

onde n é um inteiro positivo, a e q números complexos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(a;q)_n = (a;q)_\infty = (a)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-aq^j), \tag{2}$$

para $|q| < 1$.

Os polinômios Gaussianos são definidos como a seguir:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \dfrac{(q)_n}{(q)_m(q)_{n-m}}, & 0 \le m \le n \\ 0, & \text{caso contário.} \end{cases} \tag{3}$$

Estes polinômios são conhecidos como q-análogos dos números binomiais, o que significa que o limite quando q tende a 1 de (3) é

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \tag{4}$$

Os coeficientes de x^{j+n} na expansão de $(1+x+x^2)^n$ são chamados de ***coeficientes trinomiais*** e são dados por:

$$\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}_2 = \sum_{h\ge0}(-1)^h \begin{pmatrix} n \\ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n-2h \\ n-j-h \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Do mesmo modo que os polinômios Gaussianos, a expressão seguinte representa um q-análogo dos coeficientes trinomiais:

$$J(n,j,q) = \sum_{h\ge0}(-1)^h q^{h^2} \begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} 2n-2h \\ n-j-h \end{bmatrix}_{q^2}. \tag{6}$$

Define-se $T(n,k)$ como o número de caminhos reticulados de $(0,0)$ até $(n, n-2k)$, usando passos $U = (1,1)$, $D = (1,-1)$ e, em níveis pares também $H = (2,0)$.

A função geradora para $T(2n,k)$ é dada por $(1+3x+x^2)^n$. [[7], A026374.]

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0235 © 2017 SBMAC

3 Identidade 23

Em [6] a Identidade 23 é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n} = \frac{(q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^6;q^6)_\infty(q^4;q^6)_\infty(q^2;q^6)_\infty. \tag{7}$$

O Método de Andrews sugere a inserção de um parâmetro t no somatório, de maneira conveniente, para se obter uma equação funcional e uma relação de recorrência, que é o objeto central das interpretações combinatórias. Para a Identidade 23 a função utilizada foi $f_{23}(q,t)$ dada por

$$f_{23}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}}. \tag{8}$$

Que resulta na equação funcional:

$$(1-t)f_{23}(q,t) = 1 - tqf_{23}(q,tq^2). \tag{9}$$

E a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1; \\ P_n(q) &= (1-q^{2n-1})P_{n-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Santos apresentou em [3] uma fórmula para esta família de polinômios:

$$P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2+2j} J(n,3j,q) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{12j^2-10j+2} J(n,1-3j,q). \tag{11}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{q\longrightarrow -1} P_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{3j}_3 - \binom{n}{1-3j}_3. \tag{12}$$

No qual

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_3 = \sum_{h\geq 0} \left(\begin{array}{c} n \\ h \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2n-2h \\ n-j-h \end{array}\right), \tag{13}$$

resulta de

$$\lim_{q\longrightarrow -1} J(n,j,q) = \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_3. \tag{14}$$

Substituindo $q=-1$ em (10), obtém-se $P_n(-1) = 2^n$. De onde é possível chegar a uma nova fórmula para a sequência dos números pares, em termos do novo coeficiente.

$$2^n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{3j}_3 - \binom{n}{1-3j}_3 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{n}{j}. \tag{15}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0235 © 2017 SBMAC

3.1 Interpretação Combinatória

A interpretação combinatória para $P_n(-q)$ é feita usando $f_{23}(-q,t)$, dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}} = \frac{1}{(1-t)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2}}{(1-tq^2)\cdots(1-tq^{2n})} \right). \tag{16}$$

Observando que $n^2 = 1+3+\cdots+2n-1$, tem-se no numerador todos os ímpares de 1 até $2n-1$ aparecendo exatamente uma vez, e no denominador os pares irrestritos, com maior parte podendo ser $2n$. Com essas observações e levando em consideração o fator $1/(1-t)$, é possível enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *O número de partições onde os ímpares de* 1 *até o maior ímpar aparecem exatamente uma vez, e a maior parte pode ser no máximo um a mais do que o maior ímpar, em até N partes, é igual a 2^N.*

A Tabela 1 ilustra o Teorema 3.1 para pequenos valores de N.

Tabela 1: Ilustração do Teorema para $f_{23}(-q,t)$.

Partições descritas no Teorema (3.1)		
N		2^N
0	$\emptyset$	1
1	1	2
2	$3+1;\ 2+1$	4
3	$2+2+1;\ 3+2+1;\ 4+3+1,\ 5+3+1$	8
4	$2+2+2+1;\ 3+2+2+1;\ 4+4+3+1;\ 4+3+2+1;$ $5+4+3+1;\ 5+3+2+1;\ 6+5+3+1;\ 7+5+3+1$	16

Muitas interpretações como esta foram feitas em [5] para a sequência de Fibonacci, Pell, Jacobsthal, outras disponíveis em [7] e para coneficientes de séries de potências para algumas funções.

4 Coeficiente

No texto o novo coeficiente foi denotado por $\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right)_3$ e tem termo geral:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right)_3 = \sum_{h \geq 0} \left(\begin{array}{c} n \\ h \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 2n-2h \\ n-j-h \end{array} \right). \tag{17}$$

Um triângulo foi construído com este coeficiente, cada linha representa um valor fixo de n e as colunas se devem a variação de j ($-n \leq j \leq n$).

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0235 © 2017 SBMAC

							1							
						1	3	1						
					1	6	11	6	1					
				1	9	30	45	30	9	1				
			1	12	58	144	195	144	58	12	1			
		1	15	95	330	685	873	685	330	95	15	1		
	1	18	141	630	1770	3258	3989	3258	1770	630	141	18	1	
1	21	196	1071	3801	9198	15533	18483	15533	9198	3801	1071	196	21	1

Existem interpretações para as diagonais deste triângulo, da direita para a esquerda a primeira diagonal é formada apenas por 1's, a segunda diagonal é formada por múltiplos de 3, ou seja:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right)_3 = \left(\begin{array}{c} n \\ -n \end{array}\right)_3 = 1; \quad \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right)_3 = \left(\begin{array}{c} n \\ 1-n \end{array}\right)_3 = 3n. \tag{18}$$

A diagonal, cujos primeiros termos são $1, 11, 30, 58, 95, 141, \cdots$ é descrita em [[7], A051682] pelos números hendecagonais que são da forma $\dfrac{n(9n-7)}{2}$. Eles são encontrados ao se escrever os números $0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ em uma espiral triangular. A sequência dada representa os valores presentes na mesma linha, e à direita do 0. Esta diagonal pode ser descrita como:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)_3 = 1; \quad \left(\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right)_3 = \left(\begin{array}{c} n \\ 2-n \end{array}\right)_3 = \frac{n(9n-7)}{2}. \tag{19}$$

A coluna central deste triângulo tem os primeiros termos dados por $1, 3, 11, 45, 195, 873, \cdots$ e é descrita em [[7], A026375], com termo geral dado por:

$$a(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 2k \\ k \end{array}\right) = T(2n, n). \tag{20}$$

A igualdade $\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_3 = T(2n, n-j)$ é estabelecida como corolário do Teorema 4.1.

Teorema 4.1.

$$(1+3x+x^2)^n = \sum_{j=-n}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_3 x^{j+n}. \tag{21}$$

Demonstração:

$$(1+3x+x^2)^n = [(1+x)^2+x]^n = \sum_{h=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ h \end{array}\right) [(1+x)^2]^{n-h} x^h = \sum_{h=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ h \end{array}\right) (1+x)^{2n-2h} x^h =$$

$$\sum_{h=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ h \end{array}\right)\left[\sum_{k=0}^{2n-2h}\left(\begin{array}{c} 2n-2h \\ k \end{array}\right)x^{2n-2h-k}1^k\right]x^h = x^n\sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{2n-2h}\left(\begin{array}{c} n \\ h \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2n-2h \\ k \end{array}\right)x^{n-h-k} =$$

$$x^n\sum_{j=-n}^{n}\sum_{h\geq 0}\left(\begin{array}{c} n \\ h \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2n-2h \\ n-j-h \end{array}\right)x^j = \sum_{j=-n}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_3 x^{j+n}.$$

Ao substituirmos $j = n-h-k$, observando que h varia de 0 até n e k de 0 até $2n-2h$, podemos concluir que j irá variar de $-n$ até n. $\square$

Seguem dois corolários importantes.

Corolário 4.1.

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_3 = T(2n, n-j). \tag{22}$$

Corolário 4.2.

$$\sum_{j=-n}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_3 = 5^n. \tag{23}$$

Reescrevendo a função geradora $(1+3x+x^2)^n = x^n(x^{-1}+3+x)^n$, encontra-se um fato que pode ser visualizado no triângulo,

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_3 = \left(\begin{array}{c} n \\ -j \end{array}\right)_3. \tag{24}$$

Da seguinte igualdade foi possível encontrar a relação para construção do triângulo.

$$(x^{-1}+3+x)^n = (x^{-1}+3+x)(x^{-1}+3+x)^{n-1}. \tag{25}$$

Isso significa que o coeficiente de x^j na expansão de $(x^{-1}+3+x)^n$ é igual a soma do coeficiente de x^{j-1} com o triplo do coeficiente de x^j e o coeficiente de x^{j+1} na expansão de $(x^{-1}+3+x)^{n-1}$. Ou seja,

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)_3 = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j-1 \end{array}\right)_3 + 3\left(\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array}\right)_3 + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j+1 \end{array}\right)_3. \tag{26}$$

Em [5] várias conjecturas que envolvem esse coeficiente foram apresentadas, mas ainda cabe buscar uma interpretação combinatória.

5 Conclusões

Este estudo buscou apresentar características de uma generalização dos números trinomiais, coeficiente encontrado durante o trabalho com interpretações combinatórias. Foi possível interpretá-lo como a quantidade de certos tipos de caminho, mas ainda é possível pensar em uma interpretação mais próxima da feita para os números binomiais e trinomiais.

 © 2017 SBMAC

Referências

[1] C. P. Andrade, J. P. O. Santos, E. V. P. Silva, K. C. P. Silva. Polynomial Generalizations and Combinatorial Interpretations for Sequences Including the Fibonacci and Pell Numbers. *Open Journal of Discrete Mathematics*, 2013,3,25-32.

[2] G. E. Andrews. Combinatorics and Ramanujan's "lost"notebook. London Math. Soc. Lecture Note Series, No. 103, *Cambridge Univ. Press, London,* 1985, pp. 1-23.

[3] J. P. O. Santos. Computer Algebra and Identities of the Rogers-Ramanujan Type. Ph.D. thesis, *Pennsylvania State University*, 1991.

[4] J. P. O. Santos. On the Combinatorics of Polynomial Generalizations of Rogers-Ramanujan Type Identities. *Discrete Mathematics* 254.1-3 (2002): 497-511.

[5] K. C. P. Silva. Sobre questões de combinatória envolvendo os númermos de Fibonacci, Pell e Jacobsthal Tese de Doutorado, *IMECC-UNICAMP, Campinas*, 2014.

[6] L. J. Slater. Further Identities of the Rogers-Ramanujan Type. *Proc. London Math. Soc.* (2) 54 (1952): 147-167.

[7] N. J. A. Sloane The On-line Encyclopedia of Integer Sequences, *published eletronically at https://oeis.org/.*

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0235 © 2017 SBMAC