Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um método para construir uma escala de tempo onde um monômio é a delta derivada de outro qualquer.

Lucas Costa[1]
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, Ilha Solteira, SP
Berenice Camargo Damasceno[2]
Departamento de Matemática, UNESP
Luciano Barbanti[3]
Departamento de Matemática, UNESP

1 Introdução

O cálculo em escalas temporais foi introduzido em 1988 por Stefan Hilger[2], com o intuito de unificar a teoria de sistemas, tanto contínuo quanto discreto. Uma escala temporal T é um conjunto fechado não-vazio dos números reais. Exemplos de escalas temporais são $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \left\{\frac{1}{2^k}; k \in \mathbb{N}\right\}$, ou o Conjunto de Cantor.

Os operadores fundamentais desta teoria unificante são:
$\sigma(t) = inf\,\{r; r > t\}$ - Operador de avanço.
$\rho(t) = sup\,\{r; r > t\}$ - Operador de retardo.

A Δ - derivada é:

$$f^{\Delta} = \begin{cases} f'(t), \text{ se } \sigma(t) = t. \\ \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}, \text{ se } \sigma(t) \neq t. \end{cases}$$

Com estas definições Bohner e Peterson[1] fizeram o estudo de sistemas dinâmicos com o cálculo em escalas temporais. Uma questão que permanece é quando uma função pode ser a derivada de outro numa escala de tempo T apropriada. Este trabalho se move nesta direção.

2 Objetivo

Vamos exibir um método para construir uma escala de tempo T discreta onde dados $f(t) = t^k \ e \ g(t) = t^r, \ k, \ r \in \mathbb{N}, k \neq 0$ então:

$$f^{\triangle}(t) = g(t) \ em \ T. \tag{1}$$

[1] lu_cas2010@hotmail.com
[2] berenice@mat.feis.unesp.br
[3] barbanti@feis.unesp.br

3 Conclusões

Vamos sintetizar T onde vale (1). Em T temos:

$$\frac{\sigma^k(t) - t^k}{\sigma(t) - t} = at^r. \tag{2}$$

Denotando $\sigma(t)$ por σ de (2) vem:

$$\sigma^{k-1} + \sigma^{k-2}t + ... + \sigma^{k-n}t^{n-1} + ... + t^{k-1} = at^r. \tag{3}$$

Suponhamos σ contínua. Quando teremos $\sigma(t_0) = t_0$? De (3) vem $kt^{k-1} = at^r$ e assim t_0=0 e

$$\begin{cases} t_0 = exp(\frac{ln(k/a)}{r-k+1}), \; se \; r > k-1. \\ t_0 = exp(\frac{ln(a/k)}{k-1-r}), \; se \; r < k-1. \\ T = \mathbb{R}, \; se \; r = k-1 \quad e \; a = r. \\ \text{Para todo } t \neq 0, \; \sigma(t) \neq t, \text{ se r=k-1 e a} \neq r. \end{cases}$$

Usando as técnicas de Cobweb em sequências recorrentes[3] podemos construir T, pois existindo um ponto fixo de σ, além do zero, sempre teremos parte do graf(σ) acima do graf(id) para t$\geq$ 0 ou então parte do graf(σ) abaixo do graf(id) para t$\leq$ 0.

Exemplo: $f(t) = t^2 \; e \; g(t) = 3t$.

Neste caso mostra que $\sigma(t)$ cruza t para t=0. Agora $\sigma > 0$ se $t > 0$. Então T pode ser o conjunto $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^r, ...\}$.

Obs: Observamos que algumas vezes o método pode ser inconclusivo como por exemplo em $f(t) = t^2$ e $g(t) = t$, que recai no 4º caso, e o método não funciona. Neste sentido estamos ampliando o método.

Referências

[1] M. Bohner and A. Peterson, Advances in Dynamic Equations on Time Scales. *Birkhauser*, Boston, 2003.

[2] S. Hilger, Analysis on measure chains: a unitied approach to continuous and discrete calculus Results. *Math.*, 18, 18-56, 1990.

[3] Negro, Victor Alonso. A cobweb e recursão. 2014. 46 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2014.