Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Solução Assintótica Formal de um Problema de Advecção-Difusão-Reação Não Linear sobre um Meio Micro-heterogêneo e Periódico

Marcos Pinheiro de Lima[1]
Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS, Porto Alegre, RS
Leslie D. Pérez-Fernández[2]
Departamento de Matemática e Estatística, UFPel, Pelotas, RS
Julián Bravo-Castillero[3]
Faculdade de Matemática e Computação, Universidade de Havana, Cuba

Resumo. O método de homogeneização assintótica é empregado na obtenção de uma solução assintótica formal de um problema de advecção-difusão-reação não linear sobre um meio unidimensional micro-heterogêneo e periódico.

Palavras-chave. Meio Micro-heterogêneo e Periódico, Advecção-Difusão-Reação Não Linear, Homogeneização Assintótica, Solução Assintótica Formal

1 Introdução

Neste trabalho, estuda-se a obtenção de $u^\varepsilon(x,t) \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$, $\overline{\Omega} = [0,1]$, solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\sigma\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, t, u^\varepsilon, \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right)\right] = f\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}, t, u^\varepsilon\right), \qquad x \in \Omega, \qquad t > 0, \\ u^\varepsilon(0,t) = p_1(t), \qquad u^\varepsilon(1,t) = p_2(t), \qquad t > 0, \\ u^\varepsilon(x,0) = q_1(x), \qquad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde σ, f, p_i, q_1 são funções infinitamente diferenciáveis, σ e f ε-periódicas. Problemas deste tipo são de grande interesse em diversas aplicações, pois podem modelar diversos fenômenos advectivos, difusivos e reativos que ocorrem em meios micro-heterogêneos e periódicos. Tais meios apresentam separação de escalas estruturais, a qual é caracterizada pelo parâmetro geométrico pequeno ε, $0 < \varepsilon \ll 1$. Isto faz com que os coeficientes em σ e f sejam rapidamente oscilantes e, portanto, resulta relevante seu estudo mediante técnicas de homogeneização. Tais técnicas procuram estabelecer a hipótese de homogeneidade equivalente, ou seja, que existe um meio homogêneo modelado por equações diferenciais com coeficientes constantes cuja solução u_0 é ε-próxima da solução exata u^ε

[1]marcos.p.lima@hotmail.com
[2]leslie.fernandez@ufpel.edu.br
[3]jbravo@matcom.uh.cu

do problema original sobre o meio heterogêneo, ou seja, que para alguma norma se tenha $\|u^\varepsilon - u_0\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ [1]. A busca desse problema equivalente chama-se homogeneização. O uso de técnicas de homogeneização se torna relevante pela dificuldade na resolução direta deste tipo de problemas. Por exemplo, o emprego de uma abordagem numérica requereria uma discretização muito fina do domínio para capturar o caráter rapidamente oscilante dos coeficientes, o qual aumentaria consideravelmente o custo computacional e comprometeria a convergência do método adotado.

Neste trabalho, emprega-se o método de homogeneização assintótica (MHA) [2], para obtenção de uma solução assintótica formal do problema (1), isto é, propõe-se como solução de (1) uma série de potências de ε em duas escalas cujos coeficientes u_k são obtidos de uma sequência recorrente de problemas que resulta de substituir tal série em (1).

2 Aplicação do MHA

Procura-se uma solução assintótica formal do problema (1) na forma

$$u^{(2)}(x,t,\varepsilon) = u_0(x,y,t) + \varepsilon u_1(x,y,t) + \varepsilon^2 u_2(x,y,t), \qquad y = \frac{x}{\varepsilon}, \tag{2}$$

onde $u_k \in C^2(\Omega \times Y \times \mathbb{R}^+)$, $k = 0,1,2$, são 1-periódicas com relação à variável local $y \in Y = [0,1]$. A replicação periódica da célula básica εY reproduz domínio Ω ocupado pelo meio heterogêneo.

Agora, considere a linearização do fluxo σ e da fonte f com respeito à incógnita u^ε e a sua derivada $\epsilon = \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$, na vizinhança dos termos de ordem $\mathcal{O}(1)$ da assintótica (2) e da sua derivada total com relação à variavel global $x \in \Omega$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \varepsilon^{-1}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

Tais linearizações são

$$\begin{aligned}\sigma\left(y,t,u^{(2)},\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right) \approx\; & \sigma\left(y,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \\ & + \left(\varepsilon u_1(x,y,t) + \varepsilon^2 u_2(x,y,t)\right)\frac{\partial \sigma}{\partial\left(u^\varepsilon\right)}\left(y,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \\ & + \left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial y}\right]\frac{\partial\sigma}{\partial\epsilon}\left(y,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

e

$$f\left(x,y,t,u^{(2)}\right) \approx f(x,y,t,u_0) + \left(\varepsilon u_1(x,y,t) + \varepsilon^2 u_2(x,y,t)\right)\frac{\partial f}{\partial(u^\varepsilon)}\left(x,y,t,u_0\right). \tag{4}$$

De substituir (2)-(4) na equação de (1) obtém-se uma igualdade assintótica que, para ser satisfeita, os coeficientes das potências ε^{-k}, $k = 0,1,2$, devem ser nulos. Isto fornece

 © 2017 SBMAC

equações recorrentes que permitem obter os coeficientes u_k, $k = 0, 1, 2$, de (2), ou seja,

$$\varepsilon^{-2}: \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] = 0, \tag{5}$$

$$\varepsilon^{-1}: \frac{\partial}{\partial y}\left[\sigma\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{0}: \frac{\partial u_0}{\partial t} &- \frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[u_1(x, y, t)\frac{\partial \sigma}{\partial (u^{\varepsilon})}\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] \\ &- \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] - f(x, y, t, u_0) = 0,\end{aligned} \tag{7}$$

as quais são complementadas com as condições

$$\varepsilon^0: \begin{cases} u_0(0, 0, t) = p_1(t), \\ u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = p_2(t), \\ u_0(x, y, 0) = q(x), \end{cases} \quad \varepsilon^1: \begin{cases} u_1(0, 0, t) = 0, \\ u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \\ u_1(x, y, 0) = 0, \end{cases} \quad \varepsilon^2: \begin{cases} u_2(0, 0, t) = 0, \\ u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \\ u_2(x, y, 0) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

obtidas de substituir (2) nas condições de contorno e iniciais de (1).

De (5) sabe-se que

$$\frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = K(x, t).$$

De assumir que $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) > 0$ para quaisquer $x \in \Omega$ e $t > 0$, a derivada de u_0 com relação a y é expressada como

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = K(x, t)\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]^{-1}. \tag{9}$$

Para obter K aplica-se o operador de valor médio $\langle \cdot \rangle \equiv \int_0^1 (\cdot) dy$ em (9) levando em conta que u_0 é 1-periódica em y. Assim,

$$0 = K(x, t)\left\langle \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]^{-1}\right\rangle,$$

e, da positividade do segundo fator, segue que

$$K(x, t) = 0. \tag{10}$$

Logo, ao substituir (10) em (9) tem-se que u_0 não depende da variável y, ou seja,

$$u_0(x, y, t) = u_0(x, t), \tag{11}$$

o qual faz que (5) seja satisfeita identicamente. Note que (11) também pode ser obtida diretamente do seguinte Lema [2]:

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0197 © 2017 SBMAC

Lema 2.1. *Sejam $F(y)$ e $a(y) > 0$ funções diferenciáveis e 1-periódicas. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica $N(y)$ da equação $\mathcal{L}N \equiv \dfrac{d}{dy}\left(a(y)\dfrac{dN}{dy}\right) = F(y)$ é que $\langle F(y)\rangle = 0$. Ainda mais, tal solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja, $N(y) = \widetilde{N}(y) + C$, onde $\widetilde{N}$ é uma solução 1-periódica de $\mathcal{L}N = F$ tal que $\widetilde{N}(0) = 0$, e C é a constante arbitrária.*

Com efeito, sejam $x \in \Omega$ e $t > 0$ fixos, e $N(y) = u_0(x, y, t)$. De aplicar o Lema 2.1 em (5) com $a(y) \equiv \dfrac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, u_0, \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right)$, que é 1-periódica em y por causa da 1-periodicidade em y de σ e u_1, segue que existe $u_0(x, y, t)$ solução 1-periódica em y de (5), única salvo uma constante aditiva, ou seja, $u_0(x, y, t) = \widetilde{u}_0(x, y, t) + C(x, t)$. Observe que $\widetilde{u}_0 \equiv 0$ é solução de (5). Logo, $u_0(x, y, t) = C(x, t)$, ou seja, u_0 não depende de y.

Na sequência, serão apontadas algumas relações importantes na construção da solução assintótica formal $u^{(2)}$, as quais permitirão obter expressões explícitas para u_1 e u_2.

Da substituição de (11) em (6) se obtém a chamada equação do problema local

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\sigma\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] = 0, \tag{12}$$

a qual fornecerá o coeficiente u_1 do segundo termo da solução assintótica formal $u^{(2)}$.

Note que (7), a qual fornece o coeficiente u_2 do terceiro termo da solução assintótica formal $u^{(2)}$, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right] =& f(x, y, t, u_0) - \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]\\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]\\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left[u_1(x, y, t)\frac{\partial \sigma}{\partial (u^\varepsilon)}\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right].\end{aligned} \tag{13}$$

Assim, para garantir a existência de uma solução u_2 1-periódica de (13) deve-se aplicar o Lema 2.1 para cada x e t fixos, de onde segue que a condição necessária e suficiente para a existência de u_2 solução 1-periódica de (7) é

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \sigma\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right\rangle = \langle f(x, y, t, u_0)\rangle, \tag{14}$$

que é a chamada equação do problema homogeneizado para obter u_0.

Finalmente, para obter explicitamente as soluções u_1 e u_2 em função de u_0, devemos primeiro resolver o problema local para obter u_1, o qual é definido pela equação (12) e as condições $(8)(\varepsilon^1)$:

$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\sigma\left(y, t, u_0, \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad y \in Y, \qquad t > 0, \\ u_1(0, 0, t) = u_1\left(1, \dfrac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \qquad t > 0, \\ u_1(x, y, 0) = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad y \in Y. \end{cases} \tag{15}$$

Considerando $\overline{\epsilon}_0 = u_0(x,t)$ e $\overline{\epsilon}_1 = \dfrac{\partial u_0}{\partial x}$ como parâmetros tem-se em (15) uma família biparamétrica de problemas com parâmetros $\overline{\epsilon}_0$ e $\overline{\epsilon}_1$, para a qual a existência de solução 1-periódica em y é garantida pelo seguinte Lema:

Lema 2.2. *Sejam $\overline{\epsilon}_0 = u_0(x,t)$ e $\overline{\epsilon}_1 = \dfrac{\partial u_0}{\partial x}$ dois parâmetros. Então, para todo x e t fixos, existe uma única função $u_1(x,y,t)$, 1-periódica em y, solução de (15). Precisamente, existem funções $\mathcal{N}_1(y,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\epsilon}_1)$, 1-periódicas em y, soluções da família biparamétrica de problemas $\mathcal{P}_L^{(\overline{\epsilon}_0,\overline{\epsilon}_1)}$ com parâmetros $\overline{\epsilon}_0$ e $\overline{\epsilon}_1$ definida por*

$$\mathcal{P}_L^{(\overline{\epsilon}_0,\overline{\epsilon}_1)} : \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\sigma\left(y,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\epsilon}_1 + \dfrac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}\right)\right] = 0, \qquad y \in Y, \\ \mathcal{N}_1(0,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\epsilon}_1) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Demonstração: Seja $\epsilon = \overline{\epsilon}_1 + \dfrac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}$. Ao integrar a equação em (16) com respeito a y tem-se

$$\sigma\left(y,t,\overline{\epsilon}_0,\epsilon\right) = \overline{\sigma}, \tag{17}$$

onde $\overline{\sigma}$ é uma constante com relação a y. Seja

$$F(y,t,\overline{\epsilon}_0,\epsilon) = \sigma\left(y,t,\overline{\epsilon}_0,\epsilon\right) - \overline{\sigma} = 0,$$

cuja derivada com respeito a ϵ é

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \neq 0,$$

ou seja, F satisfaz as condições do teorema da função implícita [3]. Logo, existe a função $\epsilon(y,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\sigma})$, 1-periódica em y, inversa de $\sigma\left(y,t,\overline{\epsilon}_0,\epsilon\right)$ com respeito a ϵ:

$$\epsilon(y,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\sigma}) = \overline{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}.$$

Assim, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} = \epsilon(y,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\sigma}) - \overline{\epsilon}_1,$$

e, ao integrar em y levando em conta condição para a unicidade em (16), obtém-se

$$\mathcal{N}_1(y,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\epsilon}_1) = \int_0^y \left(\epsilon(s,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\sigma}) - \overline{\epsilon}_1\right) ds.$$

Agora, para garantir que $\mathcal{N}_1(y,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\epsilon}_1)$ seja 1-periódica, deve cumprir-se a relação $\mathcal{N}_1(y+1,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\epsilon}_1) - \mathcal{N}_1(y,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\epsilon}_1) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(s,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\epsilon}_1)\big|_{s=y}^{s=y+1} &= \int_y^{y+1} \left(\epsilon(s,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\sigma}) - \overline{\epsilon}_1\right) ds = \int_0^1 \left(\epsilon(y,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\sigma}) - \overline{\epsilon}_1\right) dy \\ &= \langle \epsilon(y,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\sigma})\rangle - \overline{\epsilon}_1 = 0. \end{aligned}$$

Assim, para que $\mathcal{N}_1$ seja 1-periódica, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\langle \epsilon(y,t,\overline{\epsilon}_0,\overline{\sigma})\rangle = \overline{\epsilon}_1.$$

□

Da equação (17), sabe-se que $\sigma\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \epsilon\right)$, avaliada em $\epsilon = \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial y}$, não depende explicitamente da variável y. Logo,

$$\widehat{\sigma}\left(t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) = \left\langle \sigma\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right\rangle = \sigma\left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = \overline{\sigma}, \qquad (18)$$

onde $\widehat{\sigma}$ é o chamado fluxo efetivo do meio heterogêneo.

Logo, para obter u_2 solução 1-periódica em y de (7), considera-se a condição (14), levando em conta (18). Assim, fixando x e t, busca-se uma função $\mathcal{N}_2\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1 + \dfrac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}\right)$, solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1 + \dfrac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}\right)\dfrac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial y}\right] = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\dfrac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1 + \dfrac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}\right)\dfrac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \mathcal{N}_1\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1\right)\dfrac{\partial \sigma}{\partial (u^{\varepsilon})}\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1 + \dfrac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}\right)\right\} \\ \qquad\qquad + \langle f(x, y, t, \overline{\epsilon}_0)\rangle - f(x, y, t, \overline{\epsilon}_0), \qquad y \in Y \\ \mathcal{N}_2(0, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1) = 0. \end{cases} \qquad (19)$$

Logo, resolvendo a equação (19) para a derivada de $\mathcal{N}_2$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial y} &= \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}\right)\right]^{-1}\left[\int_0^y \left(\langle f(x, y, t, \overline{\epsilon}_0)\rangle - f(x, s, t, \overline{\epsilon}_0)\right) ds - C\right. \\ &\quad \left. -\mathcal{N}_1\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1\right)\frac{\partial \sigma}{\partial (u^{\varepsilon})}\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}\right)\right] - \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x}. \end{aligned} \qquad (20)$$

Como $\mathcal{N}_2(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1)$ é 1-periódica em y, o cálculo da sua média permite obter C, ou seja,

$$\begin{aligned} C = &\left\langle \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \epsilon\right)\right]^{-1}\right\rangle^{-1}\left\langle \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \epsilon\right)\right]^{-1}\left[\int_0^y \left(\langle f(x, y, t, \overline{\epsilon}_0)\rangle - f(x, s, t, \overline{\epsilon}_0)\right) ds\right.\right. \\ &\left.\left. - \mathcal{N}_1\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1\right)\frac{\partial \sigma}{\partial (u^{\varepsilon})}\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}\right)\right] - \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x}\right\rangle, \end{aligned} \qquad (21)$$

onde $\epsilon = \overline{\epsilon}_1 + \dfrac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}$. Logo, integrando (20) tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1) = \int_0^y &\left\{\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\left(s, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s}\right)\right]^{-1}\left[\int_0^s \left(\langle f(x, y, t, \overline{\epsilon}_0)\rangle - f(x, w, t, \overline{\epsilon}_0)\right) dw\right.\right. \\ &\left.\left. - C - \mathcal{N}_1\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1\right)\frac{\partial \sigma}{\partial (u^{\varepsilon})}\left(y, t, \overline{\epsilon}_0, \overline{\epsilon}_1 + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}\right)\right] - \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x}\right\} ds, \end{aligned}$$

onde C é dado por (21).

Portanto, conclui-se, de forma geral, a construção da solução assintótica formal $u^{(2)}$ do problema (1) substituindo u_0, $u_1 = \mathcal{N}_1$ e $u_2 = \mathcal{N}_2$ em (2), ou seja,

$$u^{(2)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon \mathcal{N}_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, t, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \varepsilon^2 \mathcal{N}_2\left(\frac{x}{\varepsilon}, t, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right).$$

 © 2017 SBMAC

3 Conclusões

Neste trabalho, empregou-se o método de homogeneização assintótica para obter uma solução assintótica formal de um problema de advecção-difusão-reação não linear sobre um meio unidimensional micro-heterogêneo e periódico. Foram enunciados dois lemas que garantem a existência das soluções localmente periódicas da sequência recorrente de problemas que fornecem os coeficientes das potências do parâmetro geométrico pequeno na definição da solução assintótica formal. O caráter local destes problemas, nos quais se desacopla do problema original, permite evitar as complicações que ocorreriam em abordagens diretas como consequência do comportamento rapidamente oscilante.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do projeto CAPES No. 88881.030424/2013-01 intitulado "Desenvolvimento e Aplicações de Métodos Matemáticos de Homogeneização".

Referências

[1] G. P. Panasenko. Homogenization for periodic media: from microscale to macroscale. *Physics of Atomic Nuclei*, 71:681–694, 2008.

[2] N.S. Bakhvalov and G.P. Panasenko. *Homogeneization: averaging processes in periodic media.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

[3] M. Spivak. *Calculus on Manifolds: a Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus.* Addison-Wesley, Reading, 1965.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0197 © 2017 SBMAC