

## Uma Aplicação Prática do Método Alcatéia em um Problema de Identificação de Danos em uma Viga

Rosilene A. P. Corrêa<sup>1</sup>

Cleber A. Corrêa Junior<sup>2</sup>

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, Instituto do Noroeste Fluminense de Educação Superior, UFF, Santo Antônio de Pádua, RJ

*Resumo.* Neste trabalho é apresentada uma aplicação prática do método de otimização Alcatéia em um problema de identificação de danos estruturais. O método de otimização Alcatéia é baseado no comportamento dos lobos durante a caça. Aborda-se um problema de identificação de danos estruturais a partir da matriz de flexibilidade, que pode ser obtida a partir de suas características de vibração. Utiliza-se o método dos elementos finitos (MEF) para discretizar o campo de deslocamentos e o campo de defeitos, que será descrito através do parâmetro de coesão  $\beta$ . O problema de identificação de danos proposto pode ser encarado como um problema de otimização, onde o funcional a ser minimizado é baseado na diferença entre a matriz de flexibilidade referente ao experimento e a matriz de flexibilidade analítica do modelo original. Resultados numéricos são apresentados para diferentes cenários de danos.

*Palavras-chave.* Métodos de Otimização, Identificação de Danos, Matriz de Flexibilidade

### 1 Introdução

A identificação de danos num estágio inicial e o monitoramento contínuo da estrutura tem despertado o interesse de vários pesquisadores, pois possibilitam a redução de custos de manutenção ou reparo, além de aumentar sua vida útil, a segurança e o conforto humano.

Métodos baseados em ensaios dinâmicos têm despertado bastante atenção da comunidade científica. Esses métodos são comumente classificados em quatro categorias: método de identificação de danos no domínio do tempo [2], no domínio da frequência [6], métodos baseados na impedância [5] e na análise modal, base para o presente trabalho.

A idéia básica para a utilização de características de vibração de uma estrutura na identificação de defeitos é que os parâmetros modais (frequências naturais, formas e amortecimentos modais) são funções das propriedades físicas da estrutura (massa, rigidez e

---

<sup>1</sup>rosileneportella@id.uff.br

<sup>2</sup>cleberacj@id.uff.br

amortecimento), portanto, mudanças nas propriedades físicas se refletirão nas propriedades modais que, por sua vez, podem ser obtidas a partir de um ensaio experimental e serem utilizadas para se inferir sobre o dano.

Uma vantagem na utilização de métodos baseados na matriz de flexibilidade é a relação inversa entre esta e o quadrado das frequências naturais. Essa relação inversa faz com que a matriz de flexibilidade seja pouco influenciada pelos modos de alta frequência, difíceis de serem obtidos em um experimento real, [7].

Métodos de otimização estocásticos tem sido bastante utilizados na identificação de danos estruturais devido à necessidade de lidar com características como, por exemplo, não linearidade, presença de ruído e medição de um número limitado de Graus de Liberdade (GDL).

## 2 Modelo de Identificação de danos via matriz de flexibilidade estrutural

As frequências naturais e as formas modais não-amortecidas da estrutura podem ser obtidas a partir do problema de autovalores-autovetores apresentado na equação (1)

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\phi_i = \mathbf{0}, \quad (1)$$

onde  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez, de dimensão  $n \times n$ ,  $\omega_i$  e  $\phi_i$  referem-se, respectivamente, à *i-ésima* frequência natural e à *i-ésima* forma modal da estrutura.

De forma geral, tem-se a relação dada na equação (2)

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Lambda, \quad (2)$$

onde  $\Phi$  é a matriz modal da estrutura, de dimensão  $n \times n$ , cuja *i-ésima* coluna corresponde à forma modal  $\phi_i$  e  $\Lambda$  é uma matriz diagonal,  $n \times n$ , formada pelos valores quadráticos das frequências naturais, ou seja,  $\lambda_{ii} = \omega_i^2$ .

Para as formas modais da estrutura normalizadas em relação à matriz de massa, tem-se a equação (3) e a equação (4)

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}; \quad (3)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda, \quad (4)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $T$  representa a transposição de uma matriz.

Partindo da equação (4) e do fato de a matriz de flexibilidade de uma estrutura ser definida como a inversa da matriz de rigidez, obtém-se a matriz de flexibilidade por meio da equação (5)

$$\mathbf{G} = (\Phi \Lambda^{-1} \Phi^T) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \phi_i \phi_i^T. \quad (5)$$

Na prática, devido a limitações experimentais, uma aproximação para a matriz de flexibilidade experimental  $\mathbf{G}_{exp}$  da estrutura, pode ser dada pela equação (6)

$$\mathbf{G}_{exp} = \sum_{i=1}^{n_{exp}} \frac{1}{\omega_{i,exp}^2} \phi_{i,exp} \otimes \phi_{i,exp} \quad (6)$$

onde  $n_{exp} < n$  é o número de modos obtidos do ensaio experimental,  $\omega_{i,exp}$  e  $\phi_{i,exp}$  são, respectivamente, a  $i$ -ésima requência natural não-amortecida e forma modal obtidas experimentalmente.

Da equação (6), observa-se que, devido à relação inversa com o quadrado da frequência natural, uma boa estimativa para a matriz de flexibilidade pode ser obtida experimentalmente a partir de modos de mais baixa frequência da estrutura, que, na prática, são os modos que podem ser mais facilmente obtidos.

Da equação (6), deve-se notar que a dimensão da matriz  $\mathbf{G}_{exp}$  depende apenas do número  $m$  de GDL medidos no ensaio de vibrações, que é equivalente ao número de componentes dos modos experimentais  $\phi_{i,exp}$ . Sendo assim, a matriz de flexibilidade possui dimensão  $m \times m$ . Portanto, para se definir um problema de identificação de danos estruturais baseado na matriz de flexibilidade, torna-se necessária a determinação de uma matriz de flexibilidade analítica reduzida  $\bar{\mathbf{G}}$  — relacionada apenas aos  $m$  GDL medidos no ensaio de vibrações — que contenha informações a respeito das propriedades de rigidez da estrutura como um todo, [1,3].

### 3 Algoritmo Alcateia

Sejam dados um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  e uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $D \subset \Omega$ . O algoritmo Alcateia trata-se de uma metaheurística para o problema de achar um minimizador (ou maximizador) de  $f$  no conjunto  $D$ . Podendo, tal problema, ser escrito como:

$$\min f(x) \quad \text{sujeito a } x \in D. \quad (7)$$

Ou seja, o problema consiste em encontrar uma solução  $\bar{x}$ , com  $\bar{x} \in D$ , tal que  $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in D$ . Para a resolução do problema supracitado, parte-se da característica comportamental do lobo alfa em basear-se em escolhas plausíveis para a captura da presa com o enfoque no sucesso da caça. Durante a execução do método Alcateia, os lobos estão suscetíveis a mudanças hierárquicas, ou seja, a cada momento será nomeado como lobo alfa aquele que escolher a melhor presa, ou seja, a melhor solução durante aquela iteração. Além disso, há o coeficiente de independência, que faz com que os outros lobos tendam a buscar abater a presa que o lobo alfa está indicando, refinando assim, a cada iteração, a solução encontrada até chegar à solução ótima para o problema proposto.

O número de laços internos é contraído por uma proporção conforme são executados os laços externos.

Simulando o comportamento dos lobos, podemos dizer que a cada laço interno, o lobo, está reposicionando-se no cerco da sua presa, e a cada laço externo o lobo está indo em direção à presa.

A seguir, apresenta-se, na Figura 1, o pseudo-código do algoritmo Alcateia, com passo-a-passo de seu funcionamento: Nota-se que não há no algoritmo um critério de parada, mas pode-se, de acordo com a aplicação, definir algum critério, não havendo necessidade de realização de todos os laços estipulados.

O algoritmo foi implementado no software Matlab.

```

(1) Escolha o passo de busca inicial  $\Delta$  // intervalo [a b]
(2) Escolha o número de iterações externas  $L_e$ 
(3) Escolha o número de iterações internas  $L_i$ 
(4) Escolha o número de lobos  $N_{lobos}$ 
(5) Escolha o coeficiente de contração  $c$ 
(6) Escolha a constante de independência  $i_d$ 
(7) Gerar, aleatoriamente, uma solução inicial  $x_0$ 
(8) para i de 1 até  $L_e$  faça
(9)   aux  $\leftarrow x_0$  // variável auxiliar
(10)   para j de 1 até  $L_i$  faça
(11)     para k de 1 até  $N_{lobos}$  faça
(12)        $x[:,k] \leftarrow x_0[:,k] + \lambda_k * \Delta[:,k]$  //  $\lambda$  é um vetor de números randômicos entre -1 e 1. * é o produto termo-a-termo de vetores.
(13)       se  $f(x[:,k]) < f(x_0[:,k])$  então
(14)          $x_0[:,k] \leftarrow x[:,k]$ 
(15)          $g[k] \leftarrow f(x[:,k])$ 
(16)       fim se
(17)     fim para
(18)   fim para
(19) [fxalfa p]  $\leftarrow \min(g)$  //função  $\min(g)$  retorna a componente de menor valor de g, fxalfa, e sua posição p
(20) xalfa  $\leftarrow x_0[:,p]$ ;
(21)  $L_i \leftarrow L_i * (1-c)$ 
(22)   para t de 1 até  $N_{lobos}$  faça
(23)      $x_0[:,t] \leftarrow (i_d * x_0[:,t] + xalfa)/(i_d+1)$ 
(24)      $\Delta[:,t] \leftarrow |x_0[:,t] - aux[:,t]|$ 
(25)   fim para
(26) fim para
    
```

Figura 1: Pseudo-código do Alcateia.

No algoritimo Alcateia,  $x$  é uma matriz, onde as colunas  $x(:, k)$  representam os lobos. Em outras palavras,  $x(:, k)$  são as variáveis que receberão as possíveis soluções ótimas (presas) para os problemas avaliados. No presente trabalho, foram considerados 5 lobos, intervalo de busca  $[-1, 1]$ , 100 laços externos e 1000 laços internos, coeficiente de contração  $c = 0,01$  e constante de independência  $i_d = 4$ .

## 4 Resultados Numéricos

Nos problemas de identificação de danos propostos, visa-se a minimização, em relação ao parâmetro de coesão  $\beta$ , de um erro baseado na diferença entre a matriz de flexibilidade experimental e a matriz de flexibilidade analítica do MEF.

Definindo-se o vetor de parâmetros de coesão  $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{np}]$ , onde  $np$  é o número total de parâmetros de coesão do modelo,  $\mathbf{G}_{exp}$  e  $\tilde{\mathbf{G}}(\beta)$  a matriz de flexibilidade experimental e analítica, respectivamente, o problema de identificação de danos pode, então, ser definido como um problema de otimização onde se deseja minimizar o funcional dado na equação (8)

$$\mathcal{F}(\beta) = \frac{\|\mathbf{G}_{exp} - \tilde{\mathbf{G}}(\beta)\|^2}{2\|\mathbf{G}_{exp} - \tilde{\mathbf{G}}_0\|^2}, \quad \text{satisfazendo } 0 \leq \beta_j \leq 1, j = 1, \dots, np, \quad (8)$$

onde  $\tilde{\mathbf{G}}_0$  é a matriz de flexibilidade reduzida obtida com a estimativa inicial do vetor  $\beta$ ,

ou seja,  $\bar{\mathbf{G}}_0 = \bar{\mathbf{G}}(\beta_0)$  e  $\|\cdot\|$  refere-se à norma de Frobenius. Por simplicidade de notação,  $\bar{\mathbf{G}}(\beta)$  será indicado como  $\bar{\mathbf{G}}$ .

Será considerada uma viga de alumínio simplesmente apoiada com 1,0 m de comprimento, 0,005 m de espessura, 0,05 m de largura, módulo de elasticidade nominal  $E_0 = 7,2582 \times 10^{10}$  Pa e momento de inércia de área nominal  $I_0 = 5,2083 \times 10^{-10}$  m<sup>4</sup>. A viga em questão foi discretizada pelo método dos elementos finitos em 20 elementos bidimensionais do tipo Euler-Bernoulli. Nos casos considerados neste trabalho, a mesma malha de elementos foi utilizada para aproximar o campo de deslocamentos e também o campo de coesão (dano). Foram adotados elementos com dois nós, onde cada ponto nodal possui dois GDL de deslocamento, um transversal e outro de rotação, e um parâmetro de coesão. A estrutura possui, portanto, um total de 21 nós, 40 GDL, devido às condições de contorno abordadas, e 21 parâmetros nodais de coesão. No entanto, apenas 10 GDL transversais, igualmente espaçados, são considerados medidos.

A imposição do defeito à viga é realizada através de uma redução na altura relativa da seção transversal  $h(x)/h_0$ , nos nós contidos no interior das regiões defeituosas. Portanto, nos nós defeituosos tem-se  $h(x)/h_0 < 1$ , e nos nós onde não há danos, tem-se  $h(x)/h_0 = 1$ .

O MEF, com os valores nodais do parâmetro de coesão prescritos de acordo com os cenários de dano considerados, é utilizado para gerar as frequências e modos de vibração da estrutura danificada, representando assim os dados experimentais sintéticos utilizados no processo de identificação de danos.

Considerou-se, tanto na obtenção do modelo da estrutura utilizando-se o MEF quanto na obtenção dos dados sintéticos na identificação de danos, que apenas os modos de vibração contidos na faixa de 0 a 450 Hz foram medidos. Assim, no presente trabalho, considerou-se como medido apenas as seis primeiras formas modais da estrutura.

Com o objetivo de simular de forma mais realística os dados experimentais, a simulação da presença de ruído nas medições foi abordada, adicionando-se às formas modais de vibração uma perturbação aleatória com distribuição uniforme, [4, 7].

Como em um problema real não há informações sobre a correta localização e severidade do dano, faz-se necessário estabelecer estratégias que permitam concluir sobre a qualidade do processo de identificação. Uma forma de avaliar o resultado obtido é comparar os valores da frequência natural da estrutura, antes e depois da atualização do modelo. O indicador de erro apresentado na equação (9)

$$\omega_{IE} = \frac{\omega_i(\beta) - \omega_{i,exp}}{\omega_{i,exp}}, \quad (9)$$

foi adotado neste trabalho, onde  $\omega_i(\beta)$  e  $\omega_{i,exp}$  representam as frequências naturais do modelo e as frequências naturais experimentais, respectivamente.

A Tabela 1 apresenta os cenários de danos que serão considerados neste trabalho para uma viga simplesmente apoiada.

Neste trabalho foi adotado, como critério de parada, que quando a maior componente de  $\Delta$ , Figura 1, for menor do que a tolerância de  $10^{-7}$  ou o valor do funcional,  $\mathcal{F}(\beta)$ , equação (8), for menor do que a tolerância de  $10^{-8}$ , a execução do programa é interrompida.

Tabela 1: - Cenários de dano - Viga simplesmente apoiada

| Caso | Posição do dano (m) | $h(x)/h_0$       | Nível de ruído (%) | Figura |
|------|---------------------|------------------|--------------------|--------|
| 1    | 0,2; 0,3; 0,85      | 0,84; 0,96; 0,96 | 0                  | 2      |
| 2    | 0,2                 | 0,8              | 3                  | 3      |

No Caso 1, Figura 2, foram consideradas duas regiões de dano. Na primeira região, na extremidade esquerda da viga, foram considerados dois danos adjacentes. Na segunda região, na extremidade direita da viga, foi considerado um dano de pequena intensidade.

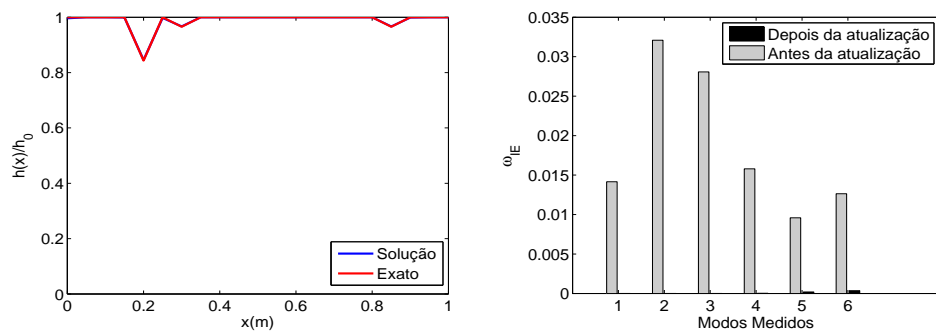


Figura 2: Identificação de danos para o Caso 1.

Como pode ser verificado na Figura 2, os danos foram localizados e quantificados com precisão.

No Caso 2, Figura 3, foi considerada apenas uma região de dano. No entanto, os sinais obtidos foram contaminados com um nível alto de ruído.

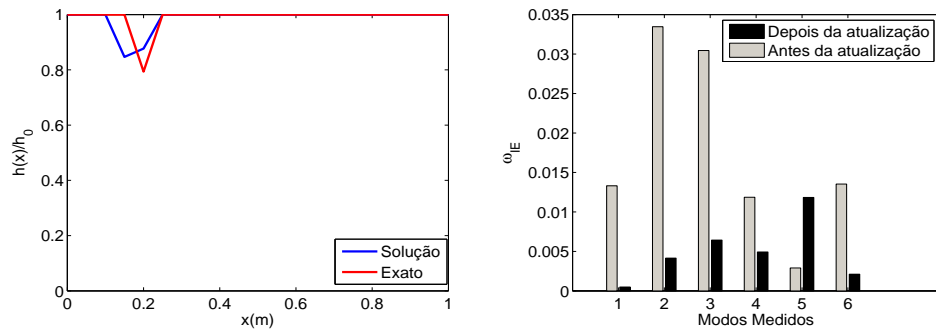


Figura 3: Identificação de danos para o Caso 2.

Apesar de a intensidade do dano não ter sido obtida com precisão, o resultado encontrado pode ser considerado bastante satisfatório, uma vez que foi considerada a contaminação do sinal obtido por ruído e que o dano está localizado em uma região pouco

sensível à presença de danos, ver [7].

## 5 Conclusões

Nos casos de danos simulados neste trabalho, considerou-se que, assim como em experimentos reais, apenas um número reduzido de informações modais estava disponível. Para isso, foram considerados como medidos, 10 GDL em um total de 40 GDL da estrutura e apenas seis modos de vibração. Para gerar dados mais realísticos, foi simulada a presença de dados ruidosos. Em um primeiro momento, um caso de dano triplo, de pouca intensidade e na ausência de ruído, foi apresentado. Nesse caso, pode-se localizar e quantificar o dano com precisão, mostrando a eficiência do modelo de identificação de danos via matriz flexibilidade e do método de otimização utilizado. O segundo caso de dano foi considerado para testar a eficiência do modelo frente a questões pertinente ao processo de identificação de danos, como a presença de dados ruidosos. Novamente, pode-se verificar um resultado bastante satisfatório, uma vez que não foram utilizadas técnicas com a finalidade de minimizar o efeito do ruído nos sinais.

## Referências

- [1] K. F. Alvin, L. D. Peterson and K. D. Park, Method for determining minimum-order mass and stiffness matrices from modal test data. *AIAA Journal*, volume 1, n. 33, 128:135, 1995. DOI:10.2514/3.12342.
- [2] P. Cacciola, N. Maugeri, G. Muscolino, Structural identification throught the measure of deterministic and stochastic time-domain dynamic response. *Composite and Structures*, volume 89, 1812:1819, 2011 DOI:10.1016/j.compstruc.2010.10.013
- [3] R. J. Guyan, Reduction of stiffness and mass matrices. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, volume 3, n. 2, pp. 380, 1965. DOI:10.2514/3.2874
- [4] B. Jaishi and W. Ren, Damage detection by finite element model updating using modal flexibility residual. *Journal of Sound and Vibration*, volume 290, 369:387, 2006. DOI:10.1016/j.jsv.2005.04.006
- [5] G. Park and D. J. Inman, Structural health monitoring using piezoelectric impedance measurements. *Philosophical Transactions of the royal societh A*, volume 365, 373:392, 2007. DOI: 10.1098/rsta.2006.1934
- [6] J. V. A. Santos, C. M. M. Soares, C. A. M. Soares, N. M. M. Maia, Structural damage identification in laminated structures using FRF data. *Composite Structures*, volume 67, 2, 239:249, 2005. DOI: 10.1016/j.compstruct.2004.09.011
- [7] L. T. Stutz, R. A. Tenenbaum and R. A. P. Corrêa, The Differential Evolution method applied to continuum damage identification via flexibility matrix. *Journal of Sound and Vibration*, volume 345, 86:102, 2015. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.01.049