

## Análise da Dinâmica Não Linear de um Braço Robótico Antropomórfico

Roberta Goergen<sup>1</sup>  
Vânia Luisa Behnen<sup>2</sup>  
Claudio da Silva dos Santos<sup>3</sup>  
Antonio Carlos Valdiero<sup>4</sup>  
Luiz Antonio Rasia<sup>5</sup>

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, UNIJUÍ, Ijuí, RS

**Resumo.** Apresentam-se os resultados da modelagem matemática e da análise dinâmica não linear de um protótipo de robô industrial do tipo antropomórfico com dois graus de liberdade. Os robôs têm a sua aplicação justificada pelo aumento da produtividade, da segurança e da qualidade em tarefas muitas vezes perigosas, repetitivas e insalubres nos mais diversos ramos da indústria, da agricultura e de serviços. Essas tarefas robotizadas requerem precisão e repetitividade nos movimentos desejados. Descreve-se o protótipo de um braço robótico do tipo antropomórfico de dois graus de liberdade construído para fins de pesquisa e ensino. Apresenta-se o modelo matemático da dinâmica não linear do robô rígido. Discutem-se suas principais características não lineares e a análise da estabilidade baseada na teoria de Lyapunov. Pretende-se assim contribuir para a modelagem e o controle de robôs, e conseqüentemente para a ampliação de seu potencial de aplicações.

**Palavras-chave.** Modelagem Matemática, Robô Antropomórfico, Teoria de Lyapunov.

### 1 Introdução

O presente trabalho tem por objetivo apresentar os resultados da modelagem matemática e da análise dinâmica não linear do protótipo de um braço robótico antropomórfico com dois graus de liberdade. O braço robótico tem grande potencial de aplicações nas indústrias [9] e em equipamentos agrícolas e agroflorestais para manuseio de peças ou posicionamento de ferramentas [1]. Conforme Romano [5] o investimento de robôs industriais nos processos de produção deve-se principalmente às necessidades impostas pelo mercado de se obter sistemas de produção cada vez mais automatizados.

---

<sup>1</sup>betinhamtm@gmail.com

<sup>2</sup>vania.behnen@hotmail.com

<sup>3</sup>prof.claudiosant@hotmail.com

<sup>4</sup>valdiero@unijui.edu.br

<sup>5</sup>rasia@unijui.edu.br

Na literatura científica recente [2,4,6,10] pode-se encontrar diversos trabalhos que tratam da importância da modelagem matemática aplicada na robótica. Radavelli et al [4] apresentam a modelagem cinemática de um braço robótico antropomórfico utilizando um método iterativo proveniente da álgebra dos quatérnios e das convenções do método de Denavit-Hartenberg. Santos et al [6] apresentam a modelagem matemática da cinemática de um manipulador robótico de dois graus de liberdade com acionamento pneumático, utilizando-se a convenção de Denavit-Hartenberg, onde as equações da cinemática direta são importantes para fins de planejamento de trajetória, simulação computacional e controle de posição do robô. Nardin e Rocco [2] utilizam um braço robótico antropomórfico para atividades de serviço em órbita espacial, onde são necessários os modelos cinemáticos e dinâmico para o adequado controle de posição. Weinkeller et al [10] mostram um controlador preditivo atuando no modelo cinemático de uma cadeira de rodas robotizada.

A seção seguinte descreve o protótipo do robô antropomórfico e a seção 3 apresenta a modelagem matemática da dinâmica de um robô rígido. Na seção 4 tem-se a análise da estabilidade pelo método direto de Lyapunov. Por fim, apresentam-se as conclusões e perspectivas futuras.

## 2 Descrição do Protótipo do Robô Antropomórfico

Os manipuladores robóticos podem ser classificados segundo sua forma construtiva em diferentes tipos de estruturas cinemáticas [3, 7]. O robô do tipo antropomórfico é o mais versátil e se assemelha à cinemática de um braço humano. Ele possui uma cadeia de elos rígidos unidos por uma sequência de juntas rotativas, tem o primeiro elo fixo (base fixa) e na extremidade do último elo (efetuador final) pode ser montada uma garra robótica ou uma ferramenta de trabalho. A Figura 1 ilustra um exemplo clássico de robô antropomórfico com seis graus de liberdade.

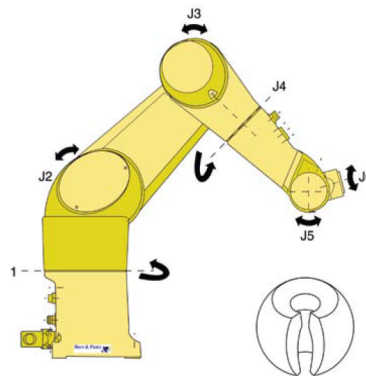


Figura 1: Exemplo de robô antropomórfico

Fonte: [3]

Cada junta rotativa do robô antropomórfico permite um deslocamento angular do braço robótico em relação ao elo anterior. Para que haja o movimento de rotação das juntas é necessário o acionamento por meio de atuadores elétricos, pneumáticos ou hidráulicos,

os quais são responsáveis pela aplicação das forças ou torques causadores dos movimentos. Para fins de modelagem matemática, da análise dinâmica, do entendimento e da identificação das não linearidades envolvidas, foi construído um protótipo de braço antropomórfico de dois graus de liberdade mostrado na Figura 2.

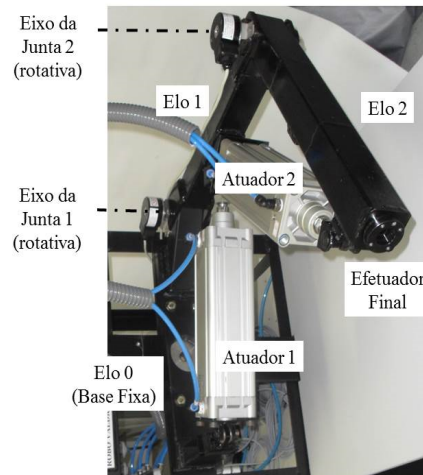


Figura 2: Protótipo de braço robótico antropomórfico desenvolvido no Núcleo de Inovação em Máquinas Automáticas e Servo Sistemas

Fonte: [6]

### 3 Modelagem Matemática de um Robô Rígido

A modelagem matemática de robô permite descrever e prever o comportamento dinâmico das variáveis de junta em função do vetor de torques aplicados nas juntas pelo acionamento. O modelo dinâmico de um robô rígido, considerando a ausência de forças externas no efetuador final e desprezando-se o atrito na estrutura, pode ser escrito na seguinte forma matricial compacta [7]:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (1)$$

onde:

$q$  é o vetor de variáveis de posição das juntas,

$H(q)$  é a matriz de inércia dependente da configuração,

$\ddot{q}$  é o vetor de variáveis de aceleração das juntas,

$C(q, \dot{q})$  é a matriz de efeitos centrífugos e de Coriolis dependente da posição e velocidade das juntas,

$\dot{q}$  é o vetor de velocidades das juntas,

$G(q)$  é o vetor de forças gravitacionais atuantes nas juntas,

$\tau$  é o vetor de torques nas juntas aplicado pelos atuadores.

Considerando o desenho do protótipo do robô rígido antropomórfico de dois graus de liberdade, mostrado na Figura 3, pode-se escrever o vetor de coordenadas na junta como  $q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ , logo  $\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$  e  $\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$ , onde  $\theta_1$  é o vetor de coordenadas da junta 1 e  $\theta_2$  é o vetor de coordenadas da junta 2.

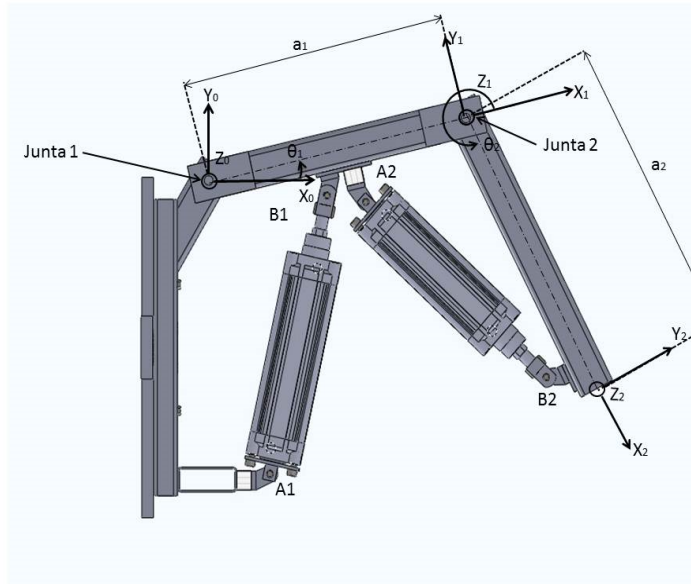


Figura 3: Desenho do protótipo de braço robótico antropomórfico com a representação dos sistemas de coordenadas e parâmetros de acordo com a convenção de Denavit-Hartenberg  
Fonte: [6]

A matriz de torque das duas juntas é dada por  $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$ , onde  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são os torques resultantes da ação dos atuadores pneumáticos.

A matriz de inércia do robô rígido  $H(q)$  pode ser escrita como:

$$H(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

onde:

$$H_{11} = I_{l1} + m_{l1}l_1^2 + I_{l2}m_{l2}(a_1^2 + l_2^2 + 2a_1l_2\cos(q_2)) + m(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(q_2))$$

$$H_{12} = I_{l2} + m_{l2}(l_2^2 + a_1l_2\cos(q_2)) + m(a_2^2 + a_1a_2\cos(q_2))$$

$$H_{21} = H_{12}$$

$$H_{22} = I_{l2} + m_{l2}l_2^2 + ma_2^2$$

Os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  representam as distâncias entre os eixos de juntas dos elos, descritos conforme a convenção de Denavit-Hartenberg [7] e representados na Figura 3.

A matriz de Coriolis  $C(q, \dot{q})$  é descrita por:

$$C(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \begin{bmatrix} h\dot{\theta}_2 & h(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -h\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

onde:

$$h = -(m_1 l_2 + m a_2) a_1 \text{sen}(q_2)$$

Considerando-se o braço robótico antropomórfico na posição horizontal (com movimentos no plano horizontal sem efeito da gravidade na junta) ou na vertical com a compensação do torque gravitacional no controle do robô, pode-se desprezar o vetor de torques gravitacionais  $G(q)$ .

Então, reescrevendo-se a equação (1), tem-se o modelo dinâmico não linear de 4ª ordem descrito na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h\dot{\theta}_2 & h(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -h\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ou ainda, pode-se reescrever na forma de um sistema,

$$\begin{cases} H_{11}\ddot{\theta}_1 + H_{12}\ddot{\theta}_2 + h\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + h(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 = \tau_1 \\ H_{21}\ddot{\theta}_1 + H_{22}\ddot{\theta}_2 - h\dot{\theta}_1^2 = \tau_2 \end{cases} \quad (3)$$

O vetor de torques  $\tau$  pode ser aplicado atuadores elétricos, pneumáticos ou hidráulicos, os quais possuem uma dinâmica própria.

## 4 Análise de Estabilidade

A análise de estabilidade é realizada pelo método direto de Lyapunov [8]. Considere a equação de energia cinética do manipulador robótico, dada por:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \cdot \dot{q} \quad (4)$$

Derivando a equação (4) em relação ao tempo, substituindo-se a dinâmica inercial isolada da equação (1), além de utilizar as propriedades do robô rígido [7,9], obtem-se:

$$\frac{dT}{dt} = \dot{q}^T \tau \quad (5)$$

Considere a aplicação de um vetor de torques  $\tau$  nas juntas do robô provenientes de um controlador proporcional-derivativo, cuja lei de controle é dada por:

$$\tau = -K_p \tilde{q} - K_D \dot{q} \quad (6)$$

onde:

$K_p$  e  $K_D$  são matrizes positivas simétricas e constantes

$\tilde{q}$  é o vetor de erros de posição de junta

Considere agora uma função de Lyapunov dada pela seguinte equação de energia:

$$V = \frac{1}{2} [\dot{q}^T H \dot{q} + \tilde{q}^T K_p \tilde{q}] \quad (7)$$

De acordo com a Teoria de Lyapunov, o sistema é estável se a derivada da função de energia, dada pela equação (7), for menor ou igual a zero.

Pode-se determinar a derivada de  $V$  para o caso de controle de posição do robô como [8]:

$$\dot{V} = \dot{q}^T (\tau + K_p \tilde{q}) \quad (8)$$

Simplificando com a substituição do vetor de torques  $\tau$  da lei de controle, tem-se:

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_D \dot{q} \leq 0 \quad (9)$$

De acordo com a Teoria de Lyapunov, pode-se analisar o comportamento do sistema controlado em malha fechada e conforme a equação (9) conclui-se que o sistema é estável. Nota-se também que  $\dot{V} = 0$  e  $\dot{q} = 0$ , implica que  $\ddot{q} = H^{-1} K_p \tilde{q}$ ,  $\dot{V}$  é igual a zero somente se  $\tilde{q}$  é igual a zero. Assim o sistema converge para o estado desejado.

## 5 Conclusão

A modelagem matemática da dinâmica de um manipulador robótico de dois graus de liberdade e a utilização das propriedades do modelo do robô rígido permitiu a análise de sua estabilidade pelo método de Lyapunov. A modelagem matemática da dinâmica do prototipo do braço robótico é importante para fins de planejamento de trajetória, simulação computacional e controle de posição do robô. Pretende-se utilizar os resultados numa aplicação industrial no Arranjo Produtivo Local Metal-Mecânico de cidade pólo em Panambi/RS.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil. Os autores também são agradecidos à UNIJUÍ pela infraestrutura do Núcleo de Inovação em Máquina Automáticas e Servo Sistemas (NIMASS), implantado com recursos provenientes da FAPERGS, do SEBRAE e do FINEP/MCT e credenciado pela Agência Nacional de Petróleo (ANP, portaria no. 1.542 do D.O.U).

## Referências

- [1] K. Dandan, A. Ananiev, I. Kalaykov. SIRO: The silos surface cleaning robot concept, Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA), pages 657-661, Takamatsu, Japan, 2013.
- [2] A. B. Nardin e E. M. Rocco. Estudo da execução de serviços em órbita de satélites usando um braço robótico cooperativo com o controle de atitude, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, volume 3, 2015. DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0196.
- [3] S. Paatz. Anatomy of a Robot, Engineering & Technology, pages 42-44, 2008.

- [4] L. A. Radavelli, D. Martins e R. Simoni. Cinemática posicional de robôs via iteração e quatérnios, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, volume 3, 2015. DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0192.
- [5] V. F. Romano. Robótica Industrial. Edgard Blucher, São Paulo, 2002.
- [6] C. da S. dos Santos, S. E. B. Viecelli, A. C. Valdiero e L. A. Rasia. Modelagem matemática da cinemática de um braço robótico acionado pneumaticamente, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, volume 3, 2015. DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0205.
- [7] L. Sciavicco e B. Siciliano. Modeling and control of robot manipulators. McGraw-Hill, Naples, Italy, 1996.
- [8] J. J. E. Slotine e W. Li. Applied Nonlinear Control. Prentice Hall, 1991.
- [9] A. C. Valdiero. Modelagem Matemática de Robôs Hidráulicos. Unijuí, Ijuí, 2012.
- [10] G. P. C. Weinkeller, J. L. F. Salles e T. F. B. Filho. Controle preditivo via programação multiparamétrica aplicado no modelo cinemático de uma cadeira de rodas robótica, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, volume 1, 2013. DOI: 10.5540/03.2013.001.01.0038.