Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Técnicas Adaptativas Aplicadas na Formulação de um Método Generalizado de Integração Numérica em Funções Definidas com $n$ Pontos Discretos

Rafael Araújo da Silva Pereira[1]
Gislan Silveira Santos[2]
IFBA - Instituto Federal da Bahia, Campus Vitória da Conquista

Entende-se por *Integração Numérica* o estudo de como o valor numérico da integral de uma função, com $n$ pontos conhecidos, poderá ser obtido via aproximações de funções (interpolações, quadrados mínimos etc). Além disso, integrar numericamente uma função, não necessariamente tal função precisa ser conhecida, ou seja, basta que a mesma seja definida em pontos discretos obtidos por algum tipo de experimento, por exemplo.

Na teoria de integração numérica, trabalha-se com a ideia de aproximações por polinômios interpoladores (*fórmulas de quadratura interpolatória* e as *fórmulas de Newton-Cotes*), nas quais aproximam a função a ser integrada em pontos pré-definidos ($n$ pontos conhecidos no intervalo de integração). Ainda existem outros tipos de quadratura, como a *quadratura de Gauss*, em que basicamente se usa produto escalar para obter os polinômios a serem integrados.

Especificamente para os métodos relacionados com as quadraturas interpolatórias e as fórmulas de Newton-Cotes, existem funções que possuem restrições de aplicabilidade e precisão. Têm-se, para este trabalho, uma análise em três regras: *regra do trapézio composta* e as *regras de Simpson compostas* (regra 1/3 e regra 3/8). Para cada uma delas, chega-se nas seguintes análises:

- A regra do trapézio composta não possui restrições de aplicabilidade, mas "peca" no quesito precisão;
- As regras de Simpson compostas (1/3 e 3/8) possuem restrições de aplicabilidade, ou seja, ambas não podem ser utilizadas para qualquer valor de $n$.

Neste panorama, torna-se relevante a formulação de um método generalizado para integração numérica de funções conhecidas apenas em pontos discretos, em que não ocorra restrições de aplicabilidade e que mantenha ou melhore a precisão das fórmulas já existentes. Para tal justificativa, foram obtidas equações ((1) e (2)) que demonstram a ideia central de integração numérica para funções quaisquer (não necessariamente conhecidas) conhecidas apenas em $n$ pontos distintos e com precisão bastante eficaz.

Se os pontos $x_r = x_0 + rh$, $r = 0, 1, \dots, n$ dividem um intervalo $[a, b]$ em um número ímpar de subintervalos iguais, então a fórmula para integração numérica de uma função desconhecida contínua no intervalo $[a, b]$, com $n$ ímpar, será dada por:

$$\int_a^b F(x)dx \cong R(n) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{F(x_i)\left(-1^{(n+i)}\right)}{(n-i)!\; i!}\left(\sum_{p=1}^{0,5(n+1)} W_p \prod_{j=0}^{n}\frac{0,5n\,(T_p+1)-j}{0,5n\,(T_p+1)-i}\right). \quad (1)$$

[1]rafa.asp98@gmail.com
[2]gislan.santos@ifba.edu.br

 

Se os pontos $x_r = x_0 + rh$, $r = 0, 1, \ldots, n$ dividem um intervalo $[a, b]$ em um número par de subintervalos iguais, então a fórmula para integração numérica de uma função desconhecida contínua no intervalo $[a, b]$, com $n$ par, será dada por:

$$\int_a^b F(x)dx \cong R(n) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} \frac{F(x_i)\left(-1^{(n+i)}\right)}{(n-i)!\; i!} \left( \sum_{p=1}^{0,5n+1} W_p \prod_{j=0}^{n} \frac{0,5n\,(T_p+1)-j}{0,5n\,(T_p+1)-i} \right). \qquad (2)$$

Sendo: $n$ número de subdivisões do intervalo $[a, b]$; $h$ passo; $i, j$ e $p$ números naturais; $T_p$ abscissas da quadratura de Gauss para um determinado $p$; $W_p$ pesos da quadratura de Gauss para um determinado $p$.

É possível observar que a função obtida, aplicando as equações (1) e (2), dependerá (exclusivamente) da variável $n$. O intuito de elaborar as fórmulas (1) e (2), basicamente, resume-se em uma generalização de técnicas de integrações numéricas. Se $n = 1$, então (1) torna-se a regra do trapézio e, se $n = 2$, então (2) torna-se a regra $\frac{1}{3}$ de Simpson. A tabela abaixo (Tabela 1), mostra os resultados da aplicação das fórmulas (1) e (2) e os métodos convencionais de integração numérica (trapézio, $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{8}$ de Simpson) na resolução da integral: $\int_1^2 \left(x^{18} - x^{12} + x^5\right)dx = 26974,47$.

Tabela 1: Valores encontrados para os diferentes métodos de integração numérica para determinado $n$ (número de pontos conhecidos).

| $n$ | Fórmula Proposta | Trapézio Composta | Simpson (1/3) Composta | Simpson (3/8) Composta |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 129.040,50 | 129040,5 | **Não se aplica** | **Não se aplica** |
| 2 | 43.917,33 | 65198,12 | 43.917,32 | **Não se aplica** |
| 3 | 35.841,33 | 46196,8 | **Não se aplica** | 35.841,33 |
| 4 | 28.407,32 | 38332,05 | 29.376,69 | **Não se aplica** |
| 5 | 27.819,57 | 34419,22 | **Não se aplica** | **Não se aplica** |
| 6 | 27.057,73 | 32213,68 | 27.552,63 | 28.090,62 |
| 7 | 27.026,49 | 30855,11 | **Não se aplica** | **Não se aplica** |
| 8 | 26.977,19 | 29961,44 | 27.171,23 | **Não se aplica** |
| 9 | 26.975,23 | 29343,22 | **Não se aplica** | 27.236,52 |
| 10 | 26.974,52 | 28898,22 | 27.057,88 | **Não se aplica** |

Fonte: Autoria própria, 2021.

A utilização das fórmulas generalizadas é eficaz, pois depende, apenas, do número de pontos conhecidos da função ($n$) que se deseja calcular uma integral. Outra observação importante é que as fórmulas não apresentam restrições de aplicabilidade, isto é, funcionam para qualquer valor de $n$. Além disso, apresentou uma boa precisão no cálculo da integral do exemplo da Tabela 1.

# Referências

[1] Chapra, S. C. *Métodos numéricos aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas.* Tradução: Rafael Silva Alípio. Revisão técnica: Antonio Pertence Júnior. 3 ed. AMGH, Porto Alegre, 2013.

[2] Franco, N. B. *Cálculo numérico.* Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.

[3] Press, W. H. et al. *Numerical Recipes: the art of scientific computing.* 3ed. Cambridge University Press, Cambridge - Reino Unido, 2007.