

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Modelagem Matemática de Motor de Corrente Contínua e Análise Dinâmica

Ivan Paulo Canal¹

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, UNIJUÍ, Ijuí, RS

Instituto Federal Farroupilha Câmpus Panambi, Panambi, RS

Antonio Carlos Valdiero²

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, UNIJUÍ, Ijuí, RS

Manuel Martín Pérez Reibold³

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, UNIJUÍ, Ijuí, RS

Resumo. O motor de corrente contínua, amplamente empregado em situações práticas relacionadas a engenharia, tem características específicas que podem ser exploradas e trabalhadas com a modelagem matemática através de teorias diversas, teorias de controle, circuitos elétricos, sistemas mecânicos e ainda outras áreas, sendo ricos campos de investigação, que possibilitam descrever, simular e analisar o comportamento do sistema com diferentes configurações. Neste estudo, demonstra-se a modelagem matemática de um motor de corrente contínua e realiza-se análise do comportamento do mesmo em função de diferentes condições, através de equacionamento matemático, análise em função do tempo, condições de equilíbrio e ainda analisando sua dinâmica através de plano de fase, explorando o comportamento das variáveis de um motor CC em situação reais.

Palavras-chave. Motor CC, Modelagem Matemática, Plano de Fase

1 Introdução

Situações reais como em problemas relacionados com engenharia, teorias de controle, circuitos elétricos, sistemas mecânicos, ciências econômicas e ainda outras áreas, são ricos campos de investigação através de modelos matemáticos, possibilitando descrever, simular e analisar o comportamento do sistema com diferentes configurações. Conhecer o comportamento dinâmico de um motor de corrente contínua é um desafio para sua implementação, devido ao conjunto de grandezas envolvidas no processo e sua inter-relação. Neste estudo, demonstra-se a modelagem matemática de um motor de corrente contínua (também conhecido como motor CC) e realiza-se análise do comportamento do mesmo em função de diferentes condições, construindo seu equacionamento matemático, explorando

¹ivan.canal@iffarroupilha.edu.br

²valdiero@unijui.edu.br

³manolo@unijui.edu.br

sua dinâmica em função do tempo, verificando suas condições de equilíbrio e ainda analisando sua resposta através de plano de fase, possibilitando explorar o comportamento de um motor CC em situação reais.

2 Motor CC e Modelagem Matemática

O motor de corrente contínua, é uma máquina elétrica que pode ser constituída de um rotor de ímã permanente e uma armadura bobinada, apresentando desempenho robusto para aplicações diversas, tendo um controle relativamente mais simples quando comparado por exemplo ao motor de indução de corrente alternada [1].

O motor CC pode ser utilizado em sistemas de controle de posição ou velocidade, fornecendo suporte para aplicações que envolvem posicionamento e controle de rotação, popularizando o uso deste tipo de motor. Com grande universo de aplicações em função de suas características, os motores CC podem ser utilizados em aplicações como laminadores, elevadores elétricos, guindastes, veículos elétricos e estações de bombeamento com velocidade variável [2].

O motor de corrente contínua, basicamente pode ser constituído por armadura e enrolamentos de campo, também podendo substituir os enrolamentos de campo por ímãs permanentes. Para fins de modelagem matemática, pode-se fazer uma consideração de equivalência, utilizando-se um motor CC de ímã permanente ou um motor CC com enrolamento de campo cuja corrente seja constante. Com esta equivalência, define-se como variável de entrada do motor CC a tensão na armadura.

Um fenômeno descrito em termos de símbolos e relações matemáticas, que reproduz ou transcreve o objeto estudado, é denominado como Modelo Matemático [3]. Para a modelagem matemática do motor CC são considerados os parâmetros elétricos (resistência e indutância de armadura), parâmetros mecânicos (momento de inércia e coeficiente de atrito viscoso) e parâmetros eletromecânicos (constantes de força eletromotriz e de torque). O modelo equivalente que representa o sistema do motor CC pode ser visualizado na Figura 1.

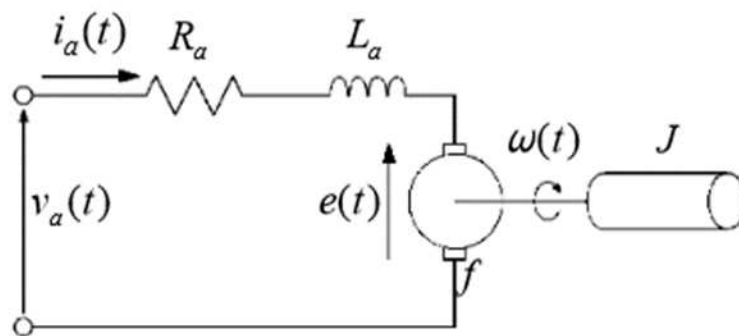


Figura 1: Modelo equivalente para representação do motor CC. Adaptado de [3].

Escrevendo-se o equacionamento para o modelo representativo do motor CC da Figura

1, tem-se a equação do movimento (1):

$$J\omega' = -b\omega + T \quad (1)$$

E considerando $T=kf.ia$, com kf representando a constante de proporcionalidade de força, pode-se reescrever (1) como (2):

$$\omega' = -\frac{b}{J}\omega + \frac{kf}{J}ia \quad (2)$$

Estruturando a equação do circuito elétrico através do somatório das tensões na malha [5], tem-se (3):

$$La.ia' + Ra.ia + e - Va = 0 \quad (3)$$

E considerando $e=ke.w$, com ke representando a constante de proporcionalidade eletromotriz, pode-se reescrever (3) como (4):

$$ia' = -\frac{Ra}{La}.ia - \frac{ke}{La}.w + \frac{1}{La}Va \quad (4)$$

Trabalhando-se as equações anteriores e considerando-se $ke=kf=k$, é possível realizar a representação matricial no formato de equações de estado como:

$$\begin{bmatrix} \omega' \\ ia' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{J} & \frac{k}{J} \\ -\frac{k}{La} & -\frac{Ra}{La} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ ia \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{La}Va \end{bmatrix}$$

3 Variáveis e Equações de Estado para o Motor CC

A partir das definições e arranjos anteriores, pode-se escrever o equacionamento do modelo em forma de variáveis de estado. Para isso, definiu-se como variáveis de estado (5) e (6), que podem ser escritas como (7) e (8):

$$x1 = \omega \quad (5)$$

$$x2 = ia \quad (6)$$

$$x1' = \omega' \quad (7)$$

$$x2' = ia' \quad (8)$$

Com as definições anteriores, pode-se escrever (2) e (4) em função das variáveis de estado como (9) e (10):

$$x1' = -\frac{b}{J}x1 + \frac{k}{J}x2 \quad (9)$$

$$x2' = -\frac{Ra}{La}.x2 - \frac{k}{La}x1 + \frac{1}{La}Va \quad (10)$$

De posse do equacionamento do modelo de estudo em função das equações de estado, pode-se encontrar o ponto de equilíbrio do sistema. Para tal, é necessário considerar a condição $x_1'=0$ e $x_2'=0$, além de aplicar ao equacionamento os parâmetros particulares de um motor CC, que como por exemplo, foram adotados como:

$$J = 0,01 \text{ Kg.m}^2/\text{s}^2 \quad b = 0,1 \text{ N.m} \quad k = 0,01 \quad R_a = 1 \text{ Ohm} \quad L_a = 0,5 \text{ H}$$

Aplicando a condição de equilíbrio e os parâmetros do motor CC, é possível encontrar x_1 e x_2 , que representam a velocidade angular e a corrente elétrica, respectivamente, obtendo-se $x_1 = \frac{2.V_a}{20,02}$ e $x_2 = 0,999V_a$.

Considerando-se o caso particular de $V_a=12V$, tem-se como ponto de equilíbrio do sistema um resultado $x_1=1,2 \text{ rad/s}$ e $x_2=11,98A$. Resultados esses que condizem com o comportamento do sistema obtido através da plotagem gráfica da resolução numérica no Matlab, realizada para as equações (2) e (4), conforme pode ser visualizado na Figura 2.

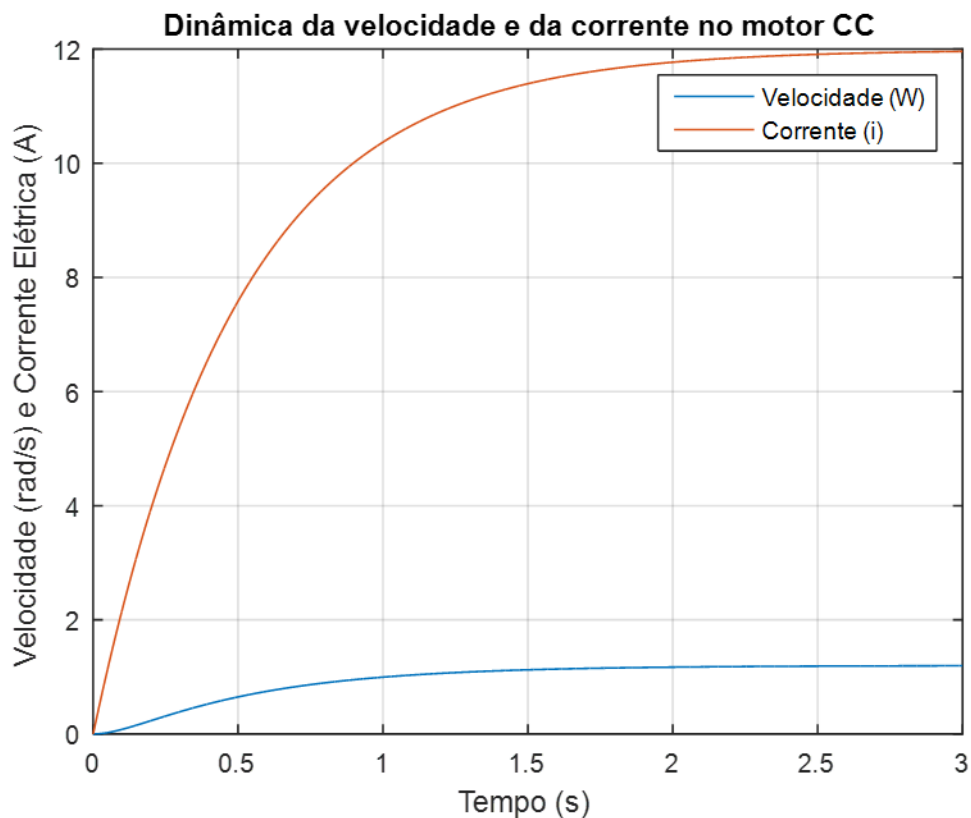


Figura 2: Comportamento do sistema considerando uma excitação $V_a=12V$.

Da Figura 2, observa-se os pontos de equilíbrio da velocidade angular em $1,2 \text{ rad/s}$ e a corrente elétrica e $11,98A$, aproximadamente para ambos, demonstrando que o método analítico condiz com a simulação numérica do modelo. Observa-se também que a partir de $3s$ o modelo entra em regime permanente, tendo sua velocidade e corrente constantes (considerando-se os parâmetros particulares apresentados anteriormente para o motor

CC).

4 Plano de fase para o Motor CC

A análise de plano de fase é um método gráfico para o estudo de sistemas, onde a ideia básica é gerar, através da dinâmica do sistema em espaço de estados (plano de duas dimensões, chamado de plano de fase), trajetórias correspondentes à várias condições iniciais, para então examinar qualitativamente as características das trajetórias. O plano de fase também pode fornecer informações referentes a estabilidade e padrões de movimento do sistema [4].

Para realizar o plano de fase do sistema, resolve-se numericamente o equacionamento do modelo em função das variáveis de estado x_1 e x_2 , considerando-se condições iniciais nulas, para diferentes valores arbitrados para V_a (1V, 2V, 4V, 6V, 8V, 10V, 12V) obtendo-se o comportamento do sistema em função das variáveis de estado, como pode ser visualizado na Figura 3.

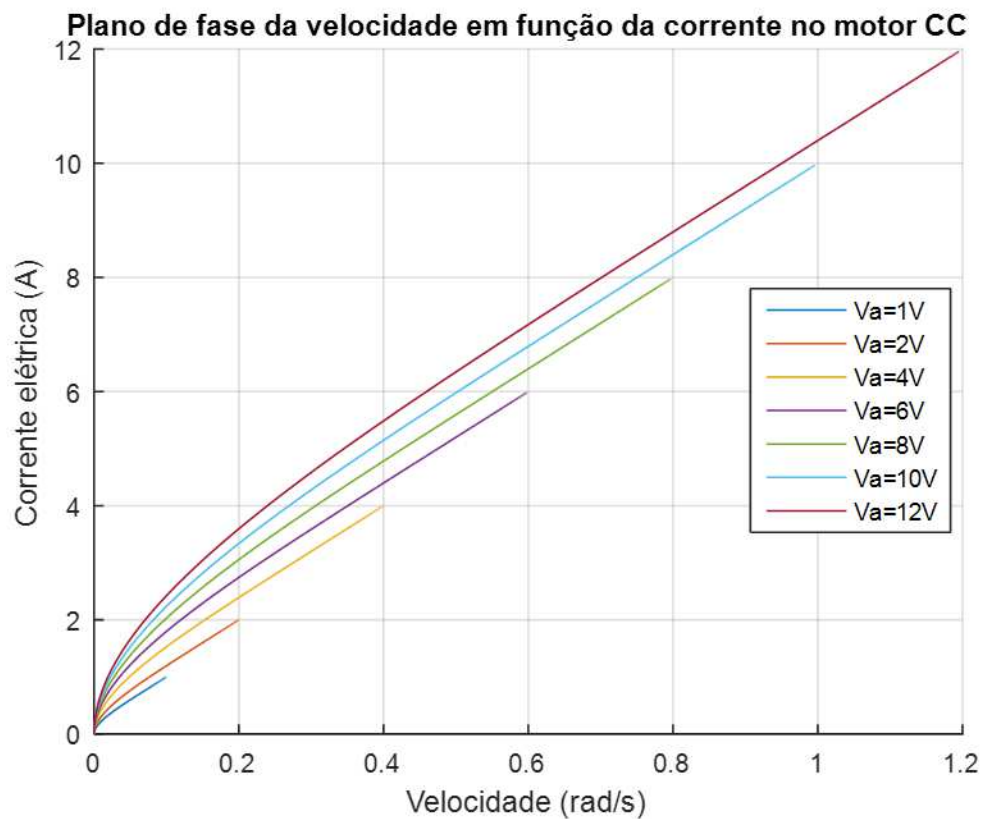


Figura 3: Plano de fase que representa o comportamento do sistema em função das variáveis de estado w (velocidade angular) e i_a (corrente elétrica na armadura).

Observa-se da representação do plano de fase da Figura 3, que cada para cada tensão

aplicada na armadura do motor CC tem-se os valores iniciais e finais para velocidade angular e a corrente elétrica, possibilitando prever o comportamento do motor em situações diversas de excitação. Reitera-se que os resultados obtidos nas simulações consideraram os parâmetros particulares de um motor CC. Para avaliar o comportamento de outro motor CC, devem ser utilizados seus parâmetros particulares fornecidos pelo fabricante para executar nova simulação computacional através do equacionamento já desenvolvido.

5 Conclusões

Conhecer o comportamento dinâmico de um motor de corrente contínua é um desafio para sua implementação. A estruturação da modelagem matemática do motor CC possibilitou descrever o comportamento da corrente da armadura e da velocidade angular do motor em função do tempo. Foi encontrado o ponto de equilíbrio do sistema frente a uma configuração específica, construindo-se um plano de fase entre a velocidade angular e a corrente da armadura, demonstrando os pontos de estabilidade das variáveis em função de diferentes excitações na tensão da armadura do motor. O equacionamento matemático do sistema e sua implementação computacional, demonstrou os pontos de estabilidade das variáveis frente a excitações diversas. Com esta implementação é possível realizar análises da dinâmica de outros motores CC, através da utilização de seus parâmetros particulares.

Agradecimentos

A Unijuí e ao Instituto Federal Farroupilha, pelo suporte e apoio.

Referências

- [1] P. R. U. Guazzelli, M. Suetake, C. A. Francisco, O. Ogashawara. Proposta e simulação de um sistema de controle de motor CC para veículos elétricos considerando a dinâmica veicular. In *Anais da Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações (DINCON 2013)*, Fortaleza, Ceará, Brasil, 2013.
- [2] J. C. Basilio, M. V. Moreira. Experimento para estimação dos parâmetros de motores de corrente contínua. In *Anais do Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (Cobenge 2001)*, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil, 2001.
- [3] R. R. Bertolotto, R. F. Camargo. Equações Diferenciais Fracionárias em Engenharia. In *Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional (CMAC Sudeste 2015)*, Vitória, Espírito Santo, Brasil, 2015.
- [4] J. J. E. SLOTINE, W. LI. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [5] R. L. Boylestad. *Introdução à Análise de Circuitos*. Pearson, São Paulo, 2010.