

Uma sequência didática para o ensino de curvas de Bézier usando o GeoGebra

Adina Rocha dos Santos¹

IFAL, Palmeira dos Índios, AL

Alane da Rocha Alves²

IFAL, Arapiraca, AL

As curvas de Bézier surgiram por volta da década de 60 e foram estudadas, de forma independente, por Pierre Bézier [1] e Paul de Casteljaou [3, 4]. O estudo sobre elas foi motivado pela indústria automobilística e nos dias atuais a curva é utilizada em diversas aplicações gráficas de desenho livre como *Illustrator*, *Freehand*, *Fireworks*, *GIMP*, *Photoshop*, *Processing*, *Inkscape* e *CorelDRAW*, e formatos de imagem vetorial como o SVG.

As referências bibliográficas que abordam estas curvas, em sua grande maioria, não têm uma linguagem matemática acessível, como por exemplo [5]. Neste trabalho, o conceito e propriedades das curvas de Bézier são descritas em uma linguagem matemática básica em nível de Ensino Médio através de uma sequência didática. Estas curvas são apresentadas usando o método de interpolação linear de Paul de Casteljaou [3, 4] e os polinômios de Bernstein via estudos de Pierre Bézier [1].

Curvas de Bézier via método de interpolação linear de Paul de Casteljaou:

Sejam B_0, B_1, \dots, B_n pontos do plano. Considere a recursão

$$\begin{cases} B_i^r(t) = (1-t)B_i^{r-1}(t) + tB_{i+1}^{r-1}(t) \\ B_i^0 = B_i, \end{cases} \quad (1)$$

com $r = 1, \dots, n$, $i = 0, \dots, n-r$. O conjunto dos pontos $B_0^n(t)$ com $t \in [0, 1]$ formam uma curva que é chamada curva de Bézier de grau n .

Curvas de Bézier via polinômios de Bernstein:

Sejam $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ pontos do plano. A curva de Bézier de grau n é dada por

$$B^n(t) = \sum_{i=0}^n B_i P_i^n(t), \quad (2)$$

onde $P_i^n(t)$ são os polinômios de Bernstein e $t \in [0, 1]$ é um parâmetro real.

A primeira, facilita a construção de algoritmos para a visualização gráfica da curva, já a segunda traz uma definição analítica da mesma. Estas formulações são equivalentes e sua demonstração é feita usando o método de indução finita de forma simples e bem didática. Para visualização gráfica das curvas de Bézier, usamos o *software GeoGebra*. Nele, fazemos a construção da curva usando as duas formulações citadas acima.

¹adina.santos@ifal.edu.br.

²alane.alves@ifal.edu.br.

O intuito desse trabalho é apresentar uma sequência didática para o ensino das curvas de Bézier e enfatizar a importância que ela representa na sociedade. Nesta sequência, as curvas de Bézier são tratadas no formato analítico e geométrico, possibilitando a aprendizagem de diversos conteúdos do Ensino Médio, como por exemplo: geometria analítica, funções polinomiais, relações de recorrência, binômios de Newton, entre outros. Mais detalhadamente, as atividades foram pensadas para serem aplicadas em um laboratório de Matemática, em dois dias, sendo cada dia com duas aulas de 50 minutos cada, com duração total da atividade de 200 minutos.

No decorrer da aula o aluno deverá utilizar o *GeoGebra* para construir uma curva de Bézier por meio do algoritmo de Casteljau e, também, utilizar o polinômio de Bernstein para encontrar a equação paramétrica da curva. Ao final, o discente deverá inserir a equação encontrada e daí verificar que, de fato, as curvas obtidas pelos dois métodos são as mesmas.

Para que o aluno consiga efetuar a atividade será necessário que o professor explique anteriormente o contexto histórico e a motivação para a época que impulsionaram os estudos dessas curvas, a partir daí, poderá defini-las através do algoritmo de interpolação linear e escrevê-las em função do polinômio de Bernstein e, então, mostrar algumas propriedades das curvas.

Além disso, com o estudo das curvas de Bézier o discente desenvolve, através das interações entre os demais colegas e o professor, o pensamento crítico e raciocínio matemático. Um exemplo disso se dá na identificação dos padrões, da conjectura e da generalização do algoritmo de Casteljau e construção através dos polinômios de Bernstein, por meio da elaboração de argumentação lógica matemática utilizada.

Conforme a Base Nacional Comum Curricular [2], o ensino de matemática no Ensino Médio visa a construção de conhecimentos voltados para a realidade, nesta direção, as curvas de Bézier têm importante papel na sociedade, tendo ela grande potencial para ser utilizada em aplicações gráficas. Como por exemplo, na construção de moldes de roupas e design de automóveis.

Referências

- [1] Bézier, P. Définition numérique des courbes et surfaces I. *Automatisme*, volume XI, pages 625-632, 1966.
- [2] Brasil. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- [3] Casteljau, P. de. *Courbes et surfaces à Pôles*. Technical Report, A. Citroën, Paris, 1963.
- [4] Casteljau, P. de. *Outillages méthodes calcul.*. Technical Report, A. Citroën, Paris, 1959.
- [5] Gerald, F. *Curves and surfaces for cagd: a practical guide, 5a. edição*. Academic Press, London, 2002.
- [6] Moliari, J. R. A., Retslaff, F. M. S. Curvas de Bézier no software GeoGebra e suas aplicações, *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 2019. DOI: 10.23925/2237-9657.2019.v8i2p026-043.
- [7] São Paulo. Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência e Tecnologia. Via Rápida Emprego: Programa de Qualificação Arco Ocupacional Profissional, vestuário, modelista 2. São Paulo, 2013.