Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Caracterizando soma de conjuntos no anel dos inteiros

Síntia Paola Rodrigues[1]
Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, MS
Irene Magalhães Craveiro[2]
Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, MS

1 Introdução

A conjectura de Goldbach e o Teorema dos quadrados de Lagrange, são exemplos clássicos da Teoria Aditiva dos Números, considerada uma subárea da Teoria dos Números e estando estreitamente ligada à Teoria Combinatória dos Números. Os principais objetos de estudo nessa área são a soma de subconjuntos A e B de um grupo abstrato G com a operação "aditiva"de G. Dessa forma, os problemas são divididos em duas classes: os problemas diretos, que consistem em encontrar o subconjunto C obtido por meio da soma de A e B, e os problemas inversos, onde, dadas informações da soma resultante de A e B e, a partir daí, é possível dizer quais são os subconjuntos A e B.

Os problemas envolvendo soma de conjuntos ganharam destaque devido ao famoso Teorema de Cauchy-Davenport e, a partir daí, os problemas de soma de conjuntos em grupos abelianos se desenvolveram e foram usados em diversas situações para resolver problemas mais complexos.

Atualmente, muitas pesquisas têm como objeto de estudo a soma de conjuntos de grupos, anéis e corpos e funções que envolvem alguns parâmetros da soma de conjunto. A teoria Aditiva dos Números, em particular a soma de subconjuntos de um dado grupo G está relacionada com problemas de determinar códigos de cobertura, ou seja, dados os inteiros positivos R, p e n, sendo p um número primo, queremos determinar a função $K_p(n, R)$ que denota a cardinalidade mínima de um código p-ário C de tamanho n, tal que para toda palavra x do espaço existe uma palavra c em C que difere de x em no máximo R coordenadas.

Neste trabalho fazeremos uma breve apresentação do tema que será a caracterização de soma de conjuntos no anel dos inteiros. Entretanto, a ideia é desenvolver mais o assunto e abordar outros tipos de anéis ou corpos com objetivo de explorar os códigos de cobertura.

2 Definição e exemplos de somas de conjuntos nos inteiros

Definição 2.1. *Considerando o subconjunto $A \subset \mathbb{Z}$ não vazio, tal que $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, definimos o conjunto soma sendo o conjunto $A + A = \{a_i + a_j;\ a_i, a_j \in A\}$.*

Exemplo 2.1. *Considerando o conjunto A, vamos determinar o conjunto $A + A$ e sua cardinalidade, sendo denotada por $|A + A|$.*

[1]sintia.rodrigues057@academico.ufgd.edu.br.
[2]irenecraveiro@ufgd.edu.br.

a) $A = \{0, 2, 4, 7, 8\}$.
Temos: $0+0 = 0$; $0+2 = 2$; $0+4 = 4$; $0+7 = 7$; $0+8 = 8$; $2+2 = 4$; $2+4 = 6$; $2+7 = 9$; $2 + 8 = 10$; $4 + 4 = 8$; $4 + 7 = 11$; $4 + 8 = 12$; $7 + 7 = 14$; $7 + 8 = 15$; $8 + 8 = 16$.
Portanto, $A + A = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16\}$ *e* $|A + A| = 13$.

b) $A = \{1, 3, 6\}$.
Temos: $1 + 1 = 2$; $1 + 3 = 4$; $1 + 6 = 7$; $3 + 3 = 6$; $3 + 6 = 9$; $6 + 6 = 12$.
Logo, $A + A = \{2, 4, 6, 7, 9, 12\}$ *e* $|A + A| = 6$.

Como vimos no Exemplo 2.1, existem somas distintas que possuem resultados iguais. Sendo assim, um dos problemas diretos da Teoria Aditiva dos Números é determinar a cardinalidade do conjunto $A + A$ sabendo a cardinalidade de A. Logo, segue abaixo um teorema que determina os limites inferior e superior para $|A + A|$ e, como resultado deste teorema, a proposição 2.1.

Teorema 2.1. *Dado um conjunto* $A \subset \mathbb{Z}$ *não vazio, então* $2|A| - 1 \leq |A + A| \leq \dfrac{|A|(|A| + 1)}{2}$.

Proposição 2.1. *Se* $A = \{2^i; i = 1, 2, ..., n\}$, *então* $|A + A| = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

3 Caracterizando soma de dois conjuntos distintos

Sendo $A, B \subset \mathbb{Z}$ conjuntos não vazios distintos, temos que a soma destes conjuntos é caracterizada como $A + B = \{a + b; a \in A \text{ e } b \in B\}$. Entanto, como $A \neq B$, o Teorema 2.1 não se aplica, neste caso, para calcular os limites inferior e superior de $|A + B|$. Assim, temos o Teorema 3.1, considerado também como um problema direto.

Teorema 3.1. *Se* $A, B \subset \mathbb{Z}$ *são conjuntos finitos não vazios, então* $|A|+|B|-1 \leq |A+B| \leq |A|\cdot|B|$.

Definição 3.1. *Dados* a_0 *e* d *inteiros tal que* $d \geq 1$, *uma progressão aritmética com* k *termos é um conjunto da forma* $\{a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \ldots, a_0 + (k - 1)d\}$.

Pela da Definição 3.1 podemos estabelecer o Teorema 3.2 e, como recíproca, a Proposição 3.1.

Teorema 3.2. *Se os conjuntos* $A, B \subset \mathbb{Z}$ *são progressões aritméticas com a mesma razão* r, *então* $|A + B| = |A| + |B| - 1$.

Proposição 3.1. *Sejam* $A, B \subset \mathbb{Z}$ *conjuntos não vazios com* $|A| = |B| = m$. *Se temos* $|A + B| = |A| + |B| - 1$, *então* A *e* B *são progressões aritméticas com a mesma razão.*

Estendendo este último resultado para o caso de cardinalidade distintas, temos o Teorema 3.3.

Teorema 3.3. *Sejam* $A, B \subset \mathbb{Z}$ *conjuntos não vazios e finitos. Se* $|A + B| = |A| + |B| - 1$, *então* A *e* B *são progressões aritméticas com a mesma razão.*

Contudo, note que tanto a Proposição 3.1, quanto o Teorema 3.3, partem do conjunto soma $A + B$ para determinar propriedades dos conjuntos A e B. Logo, esses resultados são classificados como problemas inversos na Teoria Aditiva dos Números.

Referências

[1] Nathanson, M. B. *Additive Number Theory: Inverse Problems and the Geometry of Sumsets.* New York, Springer-Verlag, 1996.

[2] Santos, O. J. N. T. N. Códigos de cobertura sobre anéis finitos. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.