

## Estudo de um modelo SIR fracionário construído com distribuição de Mittag-Leffler

Noemi Zeraick Monteiro<sup>1</sup>  
 Sandro Rodrigues Mazorche<sup>2</sup>  
 DM/UFJF, Juiz de Fora, MG

A modelagem fracionária permite capturar a dependência de estágios anteriores em materiais ou processos e, nesse contexto, torna mais próximos da realidade fenômenos biológicos, reológicos, sistemas mecânicos, elétricos, entre outros [5]. Geralmente, ela consiste em flexibilizar um modelo clássico ao substituir uma derivada de ordem inteira por uma de ordem arbitrária. Em particular, modelos compartimentais têm sido largamente estudados com ordens arbitrárias (ex.: [2]; [6]).

Ao longo da pesquisa de mestrado da primeira autora, buscamos investigar o uso de derivadas de ordem arbitrária em modelos tipo SIR, tanto analiticamente quanto por meio de simulações. Nos interessamos pelos questionamentos de persistência de características, partindo da modelagem clássica para discutir as dificuldades na construção de um modelo de ordem arbitrária não artificial. Quais características são mantidas ao realizarmos a troca das ordens? São automaticamente estabelecidos modelos consistentes, no que diz respeito à definição de parâmetros, significado físico, conservação e unidades? O que dizer sobre não negatividade, monotonicidade (quando houver), entre outras questões? O uso de técnicas para resolver estes modelos analiticamente ou numericamente é um campo interessante por si só. Porém, do ponto de vista da modelagem, é importante tentar verificar como, onde e por que o cálculo fracionário interfere no modelo.

Acreditamos que derivadas de ordem arbitrária podem surgir através de leis potenciais nas funções de infecciosidade e remoção. Assim, apresentamos em [3] uma derivação física seguindo os passos de Angstmann, Henry & McGann [1], onde utilizam a linguagem probabilística dos Passeios Aleatórios de Tempo Contínuo (PATC) e funções de Mittag-Leffler. A derivada de Riemann-Liouville surge ao longo da construção e o modelo SIR, com  $1 \geq \beta \geq \alpha > 0$ , é dado por

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma(t)N - \frac{\omega(t)S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)S(t), \quad (1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\omega(t)S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)I(t), \quad (2)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)R(t), \quad (3)$$

onde  $\gamma(t)$  é a dinâmica vital;  $\omega(t)$ , a infecciosidade extrínseca;  $N$ , a população total;  $\tau$ , um parâmetro de escala e,  $\theta(t, t')$ , a probabilidade de um infeccioso desde  $t'$  não ter falecido de morte natural até  $t$ . Se  $\beta = \alpha = 1$ ,  $\gamma(t) \equiv \gamma$  e  $\omega(t) \equiv \omega$ , obtemos o modelo SIR tradicional. Em [3], revisitamos o trabalho dos autores, iniciamos a discussão do número de reprodução e utilizamos otimização para aplicar o modelo aos dados da pandemia brasileira e italiana de COVID-19.

Aqui, nos interessamos em obter informações sobre a influência dos parâmetros  $\omega, \tau, \alpha$  e  $\beta$  no modelo (1)-(3). Inicialmente, consideramos  $\gamma(t) \equiv \gamma$  e  $\omega(t) \equiv \omega$  constantes. Posteriormente, analisamos a influência do parâmetro  $a$  para o modelo com decaimento exponencial  $\omega(t) = \omega \cdot e^{-t/a}$ .

Construímos uma pequena modificação do esquema-L1 [4] para implementação em MATLAB do modelo (1)-(3). As Figuras 1-2 exibem, como exemplo, os efeitos de  $\alpha$  e  $\beta$  na curva de infectados.

<sup>1</sup>nzmonteiro@ice.ufjf.br.

<sup>2</sup>sandro.mazorche@ufjf.edu.br.

Como exposto com mais detalhes em [3], o tempo de remoção do indivíduo do compartimento infeccioso segue uma distribuição de Mittag-Leffler relacionada a  $\alpha$ , enquanto o parâmetro  $\beta$  relaciona-se à lei da função de infectividade. As setas indicam o sentido do crescimento de  $\alpha$  e  $\beta$ .

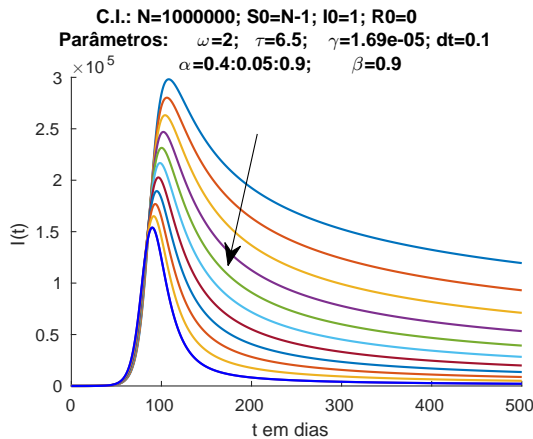


Figura 1: Variação do  $\alpha$

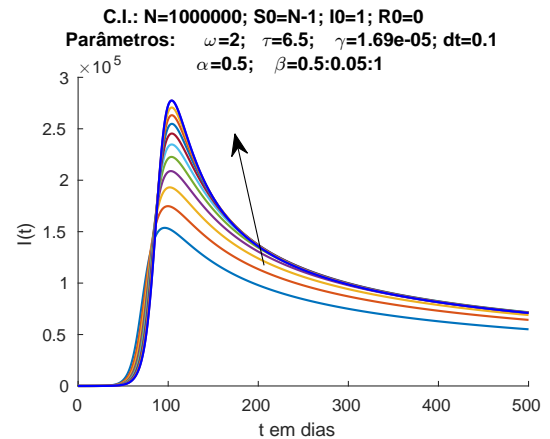


Figura 2: Variação do  $\beta$

Analisar os efeitos dos parâmetros numericamente fortalece a interpretação biológica dos mesmos e fomenta a utilização do modelo (1)-(3), ainda pouco difundido. Pretendemos expandir a aplicação aos dados da COVID-19, e o estudo auxilia no reajuste dos parâmetros posterior à otimização. Após o reajuste, uma nova otimização ficará mais acurada.

## Agradecimentos

Agradecemos o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Referências

- [1] Angstmann, C. N., Henry, B. I. e McGann, A. V. A fractional-order infectivity and recovery SIR model, *Fractal and Fractional*, 1(1), 11, 2017. DOI: 10.3390/fractalfract1010011.
- [2] Cardoso, L. C., Santos, F. L. P. dos, e Camargo, R. F. Analysis of fractional-order models for hepatitis B, *Computational and Applied Mathematics*, 37(4), 4570-4586, 2018. DOI: 10.1007/s40314-018-0588-4.
- [3] Monteiro, N. Z. e Mazorche, S. R. Fractional Derivatives Applied to Epidemiology. *TCAM, Trends in Computational and Applied Mathematics*, 2021. (to appear)
- [4] Oldham, K. e Spanier, J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier, 1974.
- [5] Podlubny, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives*. Elsevier, 1998.
- [6] Santos, J. P. C. dos, Monteiro, E. e Vieira, G. B. Global stability of fractional SIR epidemic model, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 5(1), 2017. DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0019.