Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Extensão do processo de Gram-Schmidt e o vetor de discussão de dependência linear

Bruno Lima Queiroz Santos[1]
ITA, São José dos Campos, SP
Tiara Martini dos Santos[2]
ITA, São José dos Campos, SP

No contexto da obtenção de uma base para um subespaço vetorial de dimensão finita, da discussão da dependência linear de um conjunto finito e enumerável de vetores e da decomposição de um vetor em uma base de um subespaço vetorial de dimensão finita, é possível obter um processo de Gram-Schmidt estendido por meio do qual seja possível obter uma base para o espaço vetorial gerado por um conjunto de vetores finito e enumerável, sendo Linearmente Independente (LI) ou Linearmente Dependente (LD) [1]. Além disso, a partir da matriz de Gram associada a um conjunto de vetores $\{v_1, .., v_{n-1}, v_n\}$, é possível derivar um vetor linearmente dependente descrito conforme a notação de determinantes cujas propriedades são notórias não só para a discussão da dependência linear do conjunto, mas, sobretudo, para registrar a decomposição de um vetor como combinação linear de uma base qualquer de forma fechada.

A partir do operador

$$P_{GSu} = \begin{cases} P_u, & \text{se} \quad u \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad u = 0 \end{cases},$$

onde , para $v \in V$, sendo V um espaço de produto interno de dimensão finita:

$$P_u v = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, \tag{1}$$

tem-se que o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt pode ser estendido por:

$$u_1 = v_1, \tag{2}$$

$$u_2 = v_2 - P_{GSu_1} v_2, \tag{3}$$

$$\vdots$$

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} P_{GSu_i} v_k, \tag{4}$$

$$\vdots$$

$$u_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} P_{GSu_i} v_n \ . \tag{5}$$

[1]bruno.lqs222@gmail.com
[2]tiaramartini@yahoo.com.br

Se $\text{span}(v_1, ..., v_k)$ é um subespaço vetorial não nulo, então a sua base pode ser expressa pelo conjunto ortogonal $(w_1, ..., w_m)$, que é o maior subconjunto de vetores não nulos de $(u_1, ..., u_k)$. Se o subespaço vetorial é nulo, não existe base, por definição [4]. Além disso, defina-se, por abuso de notação, utilizando-se o mnemônico do determinante:

$$V_G(\{v_1, ..., v_{n-1}, v_n\}) \equiv \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & ... & \langle v_1, v_{n-1} \rangle & \mathbf{v_1} \\ \langle v_2, v_1 \rangle & ... & \langle v_2, v_{n-1} \rangle & \mathbf{v_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & ... & \langle v_n, v_{n-1} \rangle & \mathbf{v_n} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Nesse contexto, o vetor V_G é uma combinação nula dos vetores $\{v_1, ..., v_{n-1}, v_n\}$ se, e somente se, $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ é LD. Além do mais, V_G é nulo se, e somente se, $\{v_1, ..., v_{n-1}, v_n\}$ é LD. Dessa forma, se $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ é uma base para o espaço vetorial no qual v_n está contido, o vetor denota a decomposição de v_n na base $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$, sendo ela ortogonal ou não.

Aplicações

A vantagem da técnica consiste em gerar uma base ortogonal para o subespaço gerado por um conjunto de vetores finito qualquer, não necessariamente uma base. Além disso, objetiva-se não só unificar o problema da discussão da interdependência linear ao problema da decomposição de um vetor para uma base não necessariamente ortogonal, como também resolvê-los de forma direta, sem necessidade de resolução de sistemas lineares, além de denotar a solução analítica para uma decomposição vetorial em uma base qualquer.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à minha família, cujo apoio me possibilitou seguir esse projeto. Também, gostaria de agradecer à minha professora Tiara Martini por ter me incentivado e me ajudado a seguir esse caminho.

Referências

[1] Axler, S. *Linear Algebra Done Right, 2a. edição.* Springer, New York, 2004.

[2] Lima, E. L. *Álgebra Linear, 1a. edição.* IMPA, Rio de Janeiro, 2014.

[3] Olver, P. J. and Shakiban, C. *Applied Linear Algebra, 2a. edição.* Springer International Publishing AG, Minnesota, 2018.

[4] String, G. *Linear Algebra and Its Applications, 4a. edição.* Cengage Learning, 2006. ISBN-10: 0030105676