

Diferenças finitas de alta ordem para funções reais com singularidades tipo salto

Mateus Paranaíba Ribeiro¹

Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, UFU, Ituiutaba, MG

Homero Ghioti da Silva²

Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, UFU, Ituiutaba, MG

1 Introdução

O Método da Fronteira Imersa (MFI), e mais recentemente, o Método de Interface Imersa (MII) tem como objetivo simular iterações fluido-estrutura, modelando a presença de interfaces com geometrias complexas imersas em um escoamento. Isso se dá avaliando adequadamente o campo de forças que estas interfaces produzem no seio do fluido, e introduzindo o resultado no termo fonte das equações de Navier-Stokes. Desde a sua criação, muitos pesquisadores de MFI tem proposto modificações no sentido de aperfeiçoá-lo ou adaptá-lo para determinados tipos de problemas. E essas alterações são tão significativas que é possível dizer que há vários tipos (vertentes) do MFI. O presente trabalho apresenta uma nova metodologia para MFI, usando método de diferenças finitas de alta ordem de precisão para funções com singularidades do tipo salto (em inglês jump singularities). Neste método o cálculo do escoamento próximo à fronteira imersa é corrigido a fim de manter a ordem de precisão do método empregado na posição. As propostas de MFI descritas na literatura apresentam decaimento da ordem formal dos métodos numéricos empregados, isto devido a influência da presença da fronteira imersa no escoamento. Este problema tem sido pertinente e esforços para resolvê-lo tem sido depreendido por vários pesquisadores da área. [1] mostraram que é possível realizar uma correção no métodos de diferenças finitas empregados para cálculo do escoamento próximo à fronteira, mantendo a precisão formal dos métodos utilizados.

2 Procedimento

As derivadas são calculadas como segue: Dada uma função $f(x)$ com uma descontinuidade no ponto $x = x_\alpha$, gostaríamos de escrever a série de Taylor no ponto x_i para avaliar $f(x)$ no ponto x_{i+1} . Assume-se que $f(x)$ é analítica em todo domínio $D = \{x | x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}\}$ exceto no ponto x_α onde tem uma descontinuidade (jump)

¹mateusparanaiba@gmail.com

²homero@ufu.br

no valor da função ou de suas derivadas. Se $x_i < x_\alpha$, a série de Taylor padrão não pode assumir valor de f em x_α para prever corretamente $f(x_{i+1})$, desta forma, um termo corretor Y_α deve ser adicionado, resultando:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + f''(x_i)\frac{h^2}{2} + \dots + Y_\alpha, \quad (1)$$

onde Y_α é

$$Y_\alpha = [f]_\alpha + [f']_\alpha h^+ + \frac{1}{2}[f'']_\alpha (h^+)^2 + \dots, \quad (2)$$

$h = x_{i+1} - x_i$, e $h^+ = x_{i+1} - x_\alpha$. O termo $[f]_\alpha$ representa o salto no valor da f em $x = x_\alpha$, isto é

$$[f]_\alpha = \lim_{x \rightarrow x_\alpha^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_\alpha^-} f(x). \quad (3)$$

Então $[f]_\alpha$ representa o salto no valor da função em $x = x_\alpha$, $[f']_\alpha$ o salto no valor da primeira derivada da função e assim por diante. O caso $x_i = x_\alpha$ requer que se decida se os termos $f(x_i), f'(x_i), \dots$ sejam calculados como limite pela direita ou esquerda, determinando se a correção na série de Taylor será necessária. Por fim, o caso $x_\alpha < x_i$, onde não é necessário correções para prever $f(x_i + 1)$.

3 Considerações finais

No presente trabalho, testes de verificação de ordem de precisão para cálculo de derivadas de funções com descontinuidades serão apresentados. Para isso, um programa computacional que simula a equação do calor unidimensional [2] está sendo modificado para simulação das soluções com descontinuidades. A ordem do método será avaliado com o método das soluções manufaturadas. Espera-se finalizar os testes e obter os resultados para apresentação no evento.

Agradecimentos

O trabalho foi financiado por: FAPEMIG, PIBIC/UFU cota CNPq e UFU.

Referências

- [1] N.M. Linnick, H. F. Fasel. A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. *Journal of Computational Physics*, 204: 157-192, 2005.
- [2] G. M. K. Jesus, H.G. Silva. Verificação de um programa computacional de alta ordem de precisão usando o Método das Soluções Manufaturadas. *Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional/CMAC-Nordeste, Natal/RN., 2012. ISSN 2317-3297.*