Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Condição de estabilidade de Vonn Neumann e esquemas de diferenças finitas de alta ordem

Aquisson Theyllon Gomes da Silva[1]
Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, UFU, Ituiutaba, MG
Homero Ghioti da Silva[2]
Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, UFU, Ituiutaba, MG

1 Resumo

Devido ao avanço da computação, torna-se cada vez mais atingível as soluções numéricas com alta ordem de aproximação. Para isso, os critérios de estabilidade fazem o papel importante durante a escolha de malha computacional e passo no tempo. O trabalho envolveu a análise do critério de estabilidade de Von Neumann para discretização de equações diferenciais usando métodos das diferenças finitas de alta ordem de aproximação [1]. Ao todo, quatro esquemas de diferenças finitas explícitas foram utilizadas, cujas expressões podem ser encontradas em [3]. O critério de estabilidade de Von Neumann foi avaliado na discretização da equação do calor unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

onde u representa algum perfil de propagação de calor ao longo de uma barra unidimensional e α é a constante de condutividade térmica. O critério para estabilidade de Von Neumann advém da discretização das equações através de métodos numéricos e é fundamentado no princípio da superposição, ou seja, o erro de discretização global é a somatória de erros mais simples e erros harmônicos, e esse processo é baseado na expansão em série de Fourier [2]. Assumindo Δt o passo no tempo e Δx o espaçamento entre os pontos na discretização, o critério de estabilidade de Von Neumann, usando uma discretização com diferenças finitas de segunda ordem para o cálculo da derivada espacial e diferenças finitas progressivas de primeira ordem para discretização da derivada temporal, será satisfeita, se for obedecido na escolha de Δt e Δx, a relação $\sigma = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0,5$ [2]. Primeiramente, estudou-se o critério adotado na literatura, tal como apresentado acima, e posteriormente foi feita a análise do critério quando se utiliza os métodos de alta ordem, já referenciados, em esquemas numéricos para a mesma equação do calor unidimensional supracitada. Tal como exemplo, considerando uma discretização do domínio do problema

[1]aquisson_theyllon@hotmail.com
[2]ghioti@pontal.ufu.br

$(i = 1 : \cdots : imax)$ e U_i os valores de u nos pontos (i) da malha computacional, utilizado a seguinte aproximação por diferenças finitas de quarta ordem para o cálculo da derivada espacial de ordem 2 na equação do calor temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{-\frac{1}{12}U_{i-2} + \frac{4}{3}U_{i-1} - \frac{5}{2}U_i + \frac{4}{3}U_{i+1} - \frac{1}{12}U_{i+2}}{(\Delta x)^2}. \quad (2)$$

A discretização temporal foi mantida com diferenças finitas progressiva de primeira ordem. O cálculo para a faixa de σ que garante o critério de estabilidade de Von Neumann foi refeito e resultou $\rho \leq 0,3752$. Realizando os cálculos para os esquemas de diferenças finitas de sexta e oitava ordens de paroximação, obtemos a seguinte tabela de restrições para ρ.

Tabela 1: Critério de estabilidade de Von Neumann.

método	estabilidade
segunda ordem	$\rho \leq 0,5$
quarta ordem	$\rho \leq 0,3752$
sexta ordem	$\rho \leq 0.3364$
oitava ordem	$\rho \leq 0.3128$

Foi possível concluir que o critério de estabilidade de Von Neumann depende da ordem do esquema numérico empregado. Concluiu-se também que quanto maior a ordem do método de diferenças finitas empregada, mais restrita será a faixa de ρ para satisfazer o critério de estabilidade de Vonn Neumann. Com isso, a escolha do refinamento da malha e o passo no tempo é dependende da ordem do método adotado, fato que afeta diretamente o custo computacional.

Agradecimentos

O trabalho foi financiado por: FAPEMIG, UFU e PET Matemática Pontal da FACIP - UFU.

Referências

[1] H. G. Silva, Regime não linear de trens de ondas modulados na direção transversal em um escoamento de Poiseuille plano, Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, USP, (2007).

[2] D. Sperandio, J. T. Mendes e L. H. Monken, Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos, editora Prentice-Hall, vol.1, (2003)

[3] L. N. Trefethen, Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. Cornell University, (1996).