Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Rotações Isoclínicas em $4D$

Karina Aparecida da Silva[1]
Faculdade de Engenharia, UNESP, Ilha Solteira, SP
Jaime Edmundo Apaza Rodriguez[2]
Faculdade de Engenharia, Departamento de Matemática, UNESP, Ilha Solteira, SP

1 Introdução

Assim como em $2D$ e $3D$, o grupo de isometrias I^4 em $4D$ contem um subgrupo invariante M^4, de índice 2, chamado Grupo de Movimentos ou Deslocamentos em $4D$. Verifica-se que o grupo quociente I^4/M^4 é isomorfo ao grupo multiplicativo $C_2 = \{1, -1\}$.

Qualquer deslocamento no espaço $4D$ ou é uma translação ou tem pelo menos um ponto fixo O, em cujo caso temos uma rotação com centro em O. As rotações no espaço $4D$ em torno de um ponto fixo O formam um grupo com a composição, chamado $4D$ Grupo Especial Ortogonal sobre $\mathbb{R}$ ou Grupo de Rotação $4D$, denotado por $SO(4)$ *ou* $SO(4, \mathbb{R})$. Assumiremos que os ângulos rotação estão no intervalo $[0, \pi]$.

Observação 1.1. *A transformação identidade ou não-rotação I e a reversão central $-I$ (onde cada ponto é transformado no ponto diametralmente oposto em relação ao centro de rotação), são as únicas rotações em $4D$ que comutam com cada rotação em $4D$, ou seja, elas formam o centro do grupo $SO(4)$.*

Neste trabalho apresentamos um breve estudo das chamadas rotações isoclínicas ou equiangulares em $4D$. Estas rotações aparecem quando todas as semirretas a través de O sofrem deslocamentos com o mesmo ângulo, como veremos a seguir.

2 Rotações simples e rotações duplas

As rotações em dimensão 4 são de dois tipos: Rotações Simples e Rotações Duplas. Uma rotação simples R em torno de um centro de rotação O deixa todo plano A a través de O (eixo-plano) fixo. Qualquer plano B que seja completamente ortogonal a A intersecta A em um determinado ponto P. Semirretas por O no eixo plano A não são deslocados. Semirretas a partir de O ortogonais a A são deslocados através de α. Todos as outras semirretas são deslocados através de um ângulo menor do que α.

[1]karinasilva.mat@hotmail.com
[2]jaime@mat.feis.unesp.br

Nas rotações duplas, para cada R rotação no espaço $4D$ (que fixa a origem), existe pelo menos um par de 2-planos ortogonais A e B, cada um dos quais é invariante e tal que $A \oplus B = 4D$. Para toda rotação R, os ângulos de rotação α no plano A e β no plano B (assumindo ambos não nulos) são diferentes. Os ângulos desiguais de rotação α e β satisfazendo $-\pi < \alpha,\ \beta < \pi$ são determinados por R. Assumindo que o espaço $4D$ é orientado, as orientações dos 2-planos A e B é escolhida em concordância com essa orientação. Se $\alpha \neq \beta$, então R é algumas vezes chamada de "rotação dupla".

3 Rotações Isoclínicas

Definição 3.1. *Se os ângulos de rotação de uma rotação dupla são iguais, então há um número infinito de planos invariantes em vez de apenas dois, e todas os semirretas a través de O são deslocadas através do mesmo ângulo. Tais rotações são chamadas Rotações Isoclinicas ou Equiangulares, ou deslocamentos de Clifford.*

Observação 3.1. *1) Um plano fixo é um plano para o qual cada vetor no plano mantém-se inalterado após a rotação. Um plano invariante é um plano para o qual cada vector no plano, embora possa ser afectado pela rotação, mantém-se no plano após a rotação.*

2) Nem todos os planos através de O são invariantes sob rotações isoclinicas; apenas planos que são gerados por uma semirreta e as correspondentes semirretas deslocadas são invariantes.

3) Dois planos completamente ortogonais no espaço $4D$ se cortam em apenas um ponto.

Teorema 3.1. *Os ângulos de rotação de uma rotação $4D$ composta sobre O, que tenham magnitudes idênticas, são chamados de ϕ. Quando todas as semirretas passando por 0 são rotacionadas através do mesmo ângulo ϕ, tal rotações são ditas isoclínicas.*

Seja R uma rotação isoclínica em $4D$. Seja $l \subset \alpha$ e $m = R(l)$ e nesta ordem definimos o sentido positivo da rotação em α. Seja $u \subset \beta$ uma semirreta arbitrária passando por O tal que $v = R(u)$. Então a rotação em β de u até v é denotada como positiva ou negativa dependendo se l, m, u, v são orientadas como a orientação padrão ou com a orientação oposta. Existem dois tipos de rotações isoclínicas, com sentido igual ou oposto ao par de planos de rotação. Elas são chamadas de *Rotação isoclínica esquerda e Rotação isoclínica direita*, respectivamente.

Observação 3.2. *Qualquer rotação em $4D$ pode ser composta por uma rotação isoclínica esquerda e uma rotação isoclínica direita por dois caminhos, diferindo apenas por uma reversão central.*

Referências

[1] J. B. Fraleigh. *A First Course In Abstract Algebra.* 7ª ed. Addison Wesley, 2002.

[2] J. R. Mebius. *Applications of Quaternions to Dynamical Simulation, Computer Graphics and Biomechanics.* Delft University of Technology, Delft, 1994.