Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Simetrias de Lie e Invariantes de um Oscilador Harmônico como Alternativas para a Equação de Hamilton-Jacobi

Cláudio H. C. Costa Basquerotto[1]
Samuel da Silva[2]
UNESP - Univ Estadual Paulista, Campus de Ilha Solteira, Departamento de Eng. Mecânica.
Edison Righetto[3]
UNESP - Univ Estadual Paulista, Campus de Ilha Solteira, Departamento de Matemática.

Resumo. Este trabalho mostra a relação existente entre a solução particular da equação de Hamilton-Jacobi com as simetrias de Lie e os invariantes obtidos pelo Teorema de Noether de um oscilador harmônico.
Palavras-chave: Simetrias de Lie. Invariantes. Teorema de Noether. Equação de Hamilton-Jacobi. Oscilador Harmônico.

1 Simetrias de Lie do Oscilador Harmônico

Um oscilador harmônico é descrito por $\mathcal{F}(q,\dot{q},\ddot{q}) = \ddot{q} + \omega^2 q = 0$, sendo $q = q(t)$ o deslocamento, t o tempo, $\omega^2 = k/m$, k a rigidez e m a massa. Uma transformação envolvendo q e o tempo t com relação a um parâmetro contínuo ϵ pode ser feita a partir de:

$$\bar{q} = \phi(q,t,\varepsilon), \quad \bar{t} = \psi(q,t,\varepsilon) \tag{1}$$

sendo ϕ e ψ funções que realizam a transformação. Expandido $\bar{q}$ e $\bar{t}$ com séries de MacLaurin com relação a ϵ obtém-se:

$$\bar{q} = q + \epsilon \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}}_{\eta}\bigg|_{\epsilon\approx 0} = q + \epsilon\eta \qquad \bar{t} = t + \epsilon \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}}_{\xi}\bigg|_{\epsilon\approx 0} = t + \epsilon\xi \tag{2}$$

sendo $\eta(q,t)$ e $\xi(q,t)$ campos vetoriais infinitesimais que podem ser usados para obter um gerador infinitesimal de simetria [1–3]:

$$\mathcal{X} = \eta\frac{\partial}{\partial q} + \xi\frac{\partial}{\partial t} \tag{3}$$

O oscilador admite simetria se e somente se for válida a condição de Lie com o uso de uma prolongação de segunda ordem, $\mathcal{U}''$, do gerador de infinitesimal $\mathcal{X}$ tal que:

$$\mathcal{U}''\mathcal{X}\mathcal{F} = 0 \quad \text{sendo} \quad \mathcal{U}''\mathcal{X} = \eta\frac{\partial}{\partial q} + \xi\frac{\partial}{\partial t} + \beta^{(1)}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} + \beta^{(2)}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}}$$

$\beta^{(1)} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + (\frac{\partial\eta}{\partial q} - \frac{\partial\xi}{\partial t})\dot{q} - \frac{\partial\xi}{\partial q}(\dot{q})^2$ e $\beta^{(2)} = \frac{\partial^2\eta}{\partial^2 t} + (2\frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial q} - \frac{\partial^2\xi}{\partial^2 t})\dot{q} + (\frac{\partial^2\eta}{\partial^2 q} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial q})(\dot{q})^2 - \frac{\partial^2\xi}{\partial^2 q}(\dot{q})^3 + (\frac{\partial\eta}{\partial q} - 2\frac{\partial\xi}{\partial t})\ddot{q} - 3\frac{\partial\xi}{\partial q}\dot{q}\ddot{q}$ [2]. Com a aplicação da condição de Lie na equação de movimento,

[1] cbasquerotto@ymail.com
[2] samuel@dem.feis.unesp.br
[3] righeto@mat.feis.unesp.br

pode-se obter equações determinantes para se encontrar oito geradores infinitesimais de simetria [1] dados por: $\mathcal{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $\mathcal{X}_2 = q\frac{\partial}{\partial q}$, $\mathcal{X}_3 = (1+q^2)(\sin t)\frac{\partial}{\partial q} - (q\cos t)\frac{\partial}{\partial t}$, $\mathcal{X}_4 = (1-q^2)(\sin t)\frac{\partial}{\partial q} + (q\cos t)\frac{\partial}{\partial t}$, $\mathcal{X}_5 = (1+q^2)(\cos t)\frac{\partial}{\partial q} + (q\sin t)\frac{\partial}{\partial t}$, $\mathcal{X}_6 = (1-q^2)(\cos t)\frac{\partial}{\partial q} - (q\sin t)\frac{\partial}{\partial t}$, $\mathcal{X}_7 = (q\cos 2t)\frac{\partial}{\partial q} + (\sin 2t)\frac{\partial}{\partial t}$ e $\mathcal{X}_8 = -(q\sin 2t)\frac{\partial}{\partial q} + (\cos 2t)\frac{\partial}{\partial t}$.

2 Invariantes Obtidos Através do Teorema de Noether

Para cada um dos geradores infinitesimais de simetria, associa-se uma constante de movimento obtida pela aplicação do teorema de Noether por:

$$\mathcal{A}_i = p(\dot{q}\xi_i - \eta_i) - \mathcal{L}\xi_i \quad i = 1, 2, \cdots, 8 \tag{4}$$

sendo $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ o momento canônico e $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 mq^2$ a lagrangiana. Com a utilização das funções η_i e ξ_i obtém-se as constantes de movimento: $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 mq^2$, $\mathcal{A}_2 = -mq\dot{q}$, $\mathcal{A}_3 = \sin t(-m\dot{q} - mq^2\dot{q}) + \cos t(-\frac{1}{2}mq\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 mq^3)$, $\mathcal{A}_4 = \sin t(-m\dot{q} + mq^2\dot{q}) + \cos t(\frac{1}{2}mq\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 mq^3)$, $\mathcal{A}_5 = \sin t(\frac{1}{2}mq\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 mq^3) + \cos t(-m\dot{q} - mq^2\dot{q})$, $\mathcal{A}_6 = \sin t(-\frac{1}{2}mq\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 mq^3) + \cos t(m\dot{q} - mq^2\dot{q})$, $\mathcal{A}_7 = \sin 2t(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 mq^2) + \cos 2t(-mq\dot{q})$ e $\mathcal{A}_8 = \sin 2t(mq\dot{q}) + \cos 2t(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 mq^2)$.

3 Alternativas a Teoria de Hamilton-Jacobi

A teoria de Hamilton-Jacobi é útil para obter uma transformação canônica do espaço de fases $\{q\ p\}^T$ de tal forma a obter novas variáveis $\{Q\ P\}^T$ onde a integração se torne trivial. A mais interessante é a que anula a hamiltoniana nestas novas coordenadas. Analisando os invariantes obtidos pelo teorema de Noether, observa-se que a constante de movimento $\mathcal{A}_1$ é associada à hamiltoniana do sistema, que é invariante, e relacionada diretamente a transformação de simetria com o gerador $\mathcal{X}_1$ que realiza uma translação temporal. Porém, além desta transformação, outra infinidade de constantes podem ser obtidas para definir novas coordenadas $\{Q\ P\}^T$ invariantes conduzindo a equações de movimento triviais, não necessariamente anulando a nova hamiltoniana, nem mesmo sendo canônicas. A meta deste artigo será verificar justamente estas condições, ou seja, analisar se os oito invariantes do oscilador associados a simetrias de Lie podem ser usados para obter novas coordenadas $\{Q\ P\}^T$ constantes e ainda preservando o princípio variacional como uma alternativa para a transformação usando a função principal de Hamilton.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro da CAPES, CNPq e FAPESP.

Referências

[1] C. E. Wulfman and B. G. Wybourne, The Lie group of Newton's and Lagrange's equations for the harmonic oscillator, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, n. 4, v. 9, 1976, 507-518.

[2] B. A. Kochetov, Lie group symmetries and Riemann function of Klein-Gordon-Fock equation with central symmetry, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, n. 6, v. 19, 2014, 1723 - 1728.

[3] P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, *Springer*, New York, 1st edition, 1986.