Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Problema de Mínimos Quadrados via Fatoração QR

Juliana Gavinho Sanção [1]
Universidade Federal do Espírito Santo
Eleonesio Strey [2]
Universidade Federal do Espírito Santo

1 Introdução

O problema de mínimos quadrados está relacionado com várias aplicações, tais como ajuste de curvas, problemas de demarcação de fronteiras, processamento de sinais, fotogrametria, entre outros. Dado um sistema linear $Ax = b$, o problema consiste em determinar um vetor x que minimiza a distância euclidiana entre Ax e b, isto é, tal que o valor da expressão $\|Ax - b\|_2$ seja o menor possível.

2 Problema de Mínimos Quadrados via Fatoração QR

Uma matriz $R \in \mathbb{R}^{n\times m}$ é dita *triangular superior* se as entradas abaixo da “diagonal principal” são iguais a zero (ou seja, $r_{ij} = 0$, se $i > j$). Dizemos que uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é *ortogonal* se suas colunas são ortonormais, isto é, $Q^tQ = I_n$. Uma matriz $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é denominada uma matriz de *permutação* se ela puder ser obtida da matriz identidade I_m por meio de permutação de linhas ou colunas. O determinante de uma matriz de permutação é sempre igual a ± 1 e $PP^t = P^tP = I_m$.

Para cada matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $(n > m)$ de posto r, existem uma matriz de permutação $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$, uma matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e uma matriz triangular superior

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

em que $R_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ é não singular e $R_2 \in \mathbb{R}^{r\times(m-r)}$, de modo que

$$AP = QR. \tag{1}$$

Se A tiver posto completo (isto é, $r = m$), a matriz R reduz-se a $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Essa decomposição é conhecida como *fatoração QR* e será utilizada a seguir para resolver o problema de mínimos quadrados.

[1] juliana_gavinho@hotmail.com
[2] eleonesio.strey@ufes.br

Teorema 2.1. *Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ $(n > m)$. O problema de mínimos quadrados associado ao sistema linear sobredeterminado $Ax = b$ possui infinitas soluções se posto$(A) = r < m$, e uma única solução se posto$(A) = m$.*

Demonstração. Suponha que posto$(A) = r < m$. Sejam P, Q e R matrizes satisfazendo as condições descritas em (1). Como $PP^t = I_m$ e Q é ortogonal, segue que

$$\|Ax - b\|_2^2 = \left\|(Q^tAP)P^tx - Q^tb\right\|_2^2 = \left\|R(P^tx) - Q^tb\right\|_2^2.$$

Renomeando e particionando as matrizes P^tx e Q^tb da forma

$$\hat{x} = P^tx = \begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{pmatrix} \text{ e } c = Q^tb = \begin{pmatrix}\hat{c}\\ d\end{pmatrix},$$

com $\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^{r\times 1}$, $\hat{x}_2 \in \mathbb{R}^{(m-r)\times 1}$, $\hat{c} \in \mathbb{R}^{r\times 1}$ e $d \in \mathbb{R}^{(n-r)\times 1}$, temos

$$\|Ax - b\|_2^2 = \left\|\begin{pmatrix}R_1 & R_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\hat{c}\\ d\end{pmatrix}\right\|_2^2 = \left\|\begin{pmatrix}R_1\hat{x}_1 + R_2\hat{x}_2 - \hat{c}\\ -d\end{pmatrix}\right\|_2^2.$$

Logo

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|R_1\hat{x}_1 + R_2\hat{x}_2 - \hat{c}\|_2^2 + \|d\|_2^2.$$

Como R_1 é não singular, segue que $\|Ax - b\|_2$ é mínimo se, e somente se, $\hat{x}_1 = R_1^{-1}(\hat{c} - R_2\hat{x}_2)$ (isto é, $R_1\hat{x}_1 + R_2\hat{x}_2 - \hat{c} = 0$) e $\hat{x}_2$ é qualquer. Como $\hat{x} = P^tx$ e $P^tP = I_m$, segue que o valor da expressão $\|Ax - b\|_2$ é mínimo se, e somente se,

$$x = P\begin{pmatrix}R_1^{-1}(\hat{c} - R_2\hat{x}_2)\\ \hat{x}_2\end{pmatrix},$$

em que $\hat{x}_2 \in \mathbb{R}^{(m-r)\times 1}$ é qualquer. Isto mostra que, neste caso, o problema de mínimos quadrados possui infinitas soluções. A demonstração da outra parte é similar. □

Um algoritmo para resolver o problema de mínimos quadrados via QR pode ser obtido a partir da demonstração do Teorema 2.1.

Para elaborar este resumo utilizamos as referências [1] e [2].

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAP.

Referências

[1] Graça, A. B. R. A. Problemas de Mínimos Quadrados: Resolução e Aplicações, Trabalho de Conclusão de Curso, UFF, 2016.

[2] Watkins, D. S. *Fundamentals of Matrix Computations, 3ª edição*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2010.