Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Projeto de controle robusto via LMIs para um sistema 2D *ball balancer* utilizando o *software* Scilab

Lucas Padilha dos Santos[1]
IFMS, Três Lagoas, MS
Diogo Ramalho de Oliveira[2]
IFMS, Três Lagoas, MS
Edson Italo Mainardi Júnior
IFMS, Três Lagoas, MS
Lucas Rangel de Oliveira
IFMS, Três Lagoas, MS

O objetivo deste trabalho é apresentar o projeto de controle robusto para um sistema linear sujeito a incertezas paramétricas. O projeto de controle é baseado em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs). Como contribuição, utiliza-se o *software* gratuito Scilab para resolver o problema de controle dado através de LMIs e para validar a metodologia proposta através de simulações da dinâmica do sistema controlado. O projeto de controle é desenvolvido para o sistema 2D *ball balancer*, fabricado pela Quanser, o qual possui uma dinâmica semelhante a um sistema bola-viga.

Considere o sistema linear incerto invariante no tempo, descrito na forma de variáveis de estado: $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left(A_i x(t) + B_i u(t)\right) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t)$, sendo $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ são as matrizes de dimensões adequadas que descrevem a dinâmica do sistema e pertencem a um conjunto convexo de natureza politópica, sendo que A_i e B_i representam a dinâmica do sistema em cada vértice do politopo, que possui um número total de vértices igual a r, tal que $r = 2^{n_i}$ e n_i é o número de elementos incertos distintos do sistema. O parâmetro α pertence a um simplex unitário Λ definido como $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, r\}\}$. Em [1], considerando a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$, sendo $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, é apresentado um projeto de controle, baseado em condições LMIs, tal que o controlador K projetado estabiliza assintoticamente o sistema dinâmico e adiciona uma restrição denominada taxa de decaimento ($\rho > 0$), que está diretamente relacionada ao tempo de estabilização do sistema.

Teorema 1 ([1]). *O sistema incerto $\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t)$ é quadraticamente estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual ρ, por um ganho de realimentação de estados, se existirem $X \in R^{n_x \times n_x}$ e $M \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tais que, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $X > 0$, $XA_i^T - M^T B_i^T + A_i X - B_i M + 2\rho X < 0$. Se as LMIs forem factíveis, o controlador robusto é dado por $K = MX^{-1}$.*

O sistema 2D *ball balancer* consiste em um placa quadrada, conectada a dois servomotores. Sobre a placa, uma bola pode se movimentar nas direções $x - y$. A inclinação da placa pode ser ajustada através dos servomotores para equilibrar a bola. Uma câmera, posicionada a cima do equipamento é utilizada para medir a posição da bola. A representação do eixo x do sistema 2D *ball balancer* (ver Figura 1) pode ser dada através de espaço de estados, utilizando o vetor de estado $x(t) = [d_x(t)\ \dot{d}_x(t)\ \theta_x(t)\ \dot{\theta}_x(t)]^T$, sendo que $d_x(t)$ é a posição da bola, $\dot{d}_x(t)$ é a velocidade da bola, $\theta_x(t)$ é a posição angular do servomotor e $\dot{\theta}_x(t)$ é a velocidade angular do servomotor. O modelo matemático linearizado do sistema 2D *ball balancer* [2] é dado por duas equações a

[1] luccas_life@outlook.com
[2] diogo.ramalho@ifms.edu.br

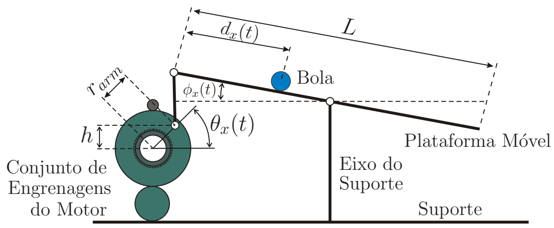

Figura 1: Modelo esquemático do 2D *ball balancer* na direção x.

seguir: $\ddot{d}_x(t) = K_{bb}\theta_x(t)$ e $\tau\ddot{\theta}_x(t) + \dot{\theta}_x(t) = K_m V_m(t)$, sendo que o sinal de controle $u(t) = V_m(t)$, $K_{bb} = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)}$, e os demais parâmetros possuem os seguintes valores: massa da bola ($m_b = 0{,}003$kg), distância do eixo do motor ao ponto de fixação ($r_{arm} = 2{,}54$cm), raio da bola ($r_b = 1{,}96$cm), comprimento da mesa ($L_{plate} = 27{,}5$cm), momento de inércia da bola ($J_b = 0{,}00000046$kgm^2), aceleração da gravidade ($g = 9{,}8$m/s^2), parâmetros do servomotor ($K_m = 1{,}76$rad/sV) e ($\tau = 0{,}0285$).

Utilizando os valores apresentados, tem-se que $K_{bb} = 1{,}3$. Neste trabalho, vamos considerar que a bola pode possuir variações na sua dimensão e peso, ou seja, pode possuir parâmetros incertos, com limites inferior e superior, tal que $1{,}3 \leq K_{bb} \leq 1{,}6$. Utilizando o *software* SciLab, foram realizados dois projetos de controle a partir do Teorema 1, com taxa de decaimento igual a 0 e igual a 3. Os seguintes controladores foram encontrados respectivamente: $K = [0{,}0184\ 0{,}0351\ 0{,}0909\ -0{,}5442]$ e $K = [48{,}2771\ 23{,}9294\ 5{,}8626\ -0{,}2461]$. As Figuras 2(a) e 2(b) ilustram as simulações da dinâmica do sistema em malha fechada, considerando uma condição inicial $x(0) = [0{,}05\ 0\ 0\ 0]^T$, utilizando novamente o *software* Scilab. Observe que aumentando a taxa de decaimento, o tempo de estabilização do sistema diminuiu, viabilizando uma futura implementação prática do controlador.

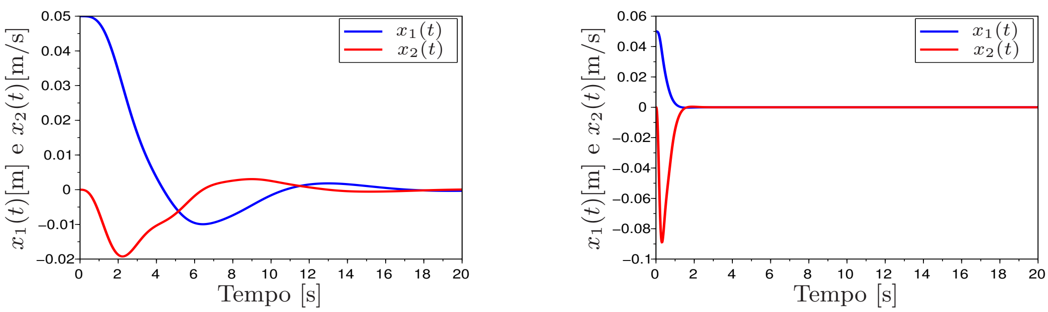

Figura 2: Simulação da resposta dinâmica do sistema 2D *ball balancer* utilizando o controlador com: (a - esquerda) taxa de decaimento $\rho = 0$; (b - direita) taxa de decaimento $\rho = 3$.

Agradecimentos

Ao incentivo financeiro do CNPq e do IFMS através do Edital 028/2019-Propi/IFMS (ID:698).

Referências

[1] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Vol. 15. Studies in Applied Mathematics, SIAM - Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia, 1994.

[2] Quanser. *2D ball balancer control using QUARC: Instructor manual.* Ontário, Canadá, 2008.