Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Qualitativo de um Modelo de Oscilações Sísmicas

Murilo de Souza Penteado[1]
Pedro Toniol Cardin[2]
Univerisade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira/SP

1 Introdução

Milhares de terremotos ocorrem todos os anos ao redor do mundo, porém a maioria deles nem mesmo são percebidos pela população. Isso se dá pelo fato de seus hipocentros serem muito profundos e também por ocorrerem em áreas inabitadas na maioria das vezes. Entretanto, quando há um tremor de grande intensidade em uma região com alta densidade demográfica, os efeitos podem ser devastadores caso a região não esteja preparada para esses abalos. Pensando nas consequências que esses tremores podem causar em estruturas construídas pelo homem, apresentamos um estudo sobre o equilíbrio de um bloco de concreto por meio de um modelo de controle automático.

Muitos fenômenos naturais podem ser modelados por meio de Equações Diferencias Ordinárias (EDOs) contínuas e podem ser estudados usando ferramentas, por exemplo, da Teoria Qualitativa das EDOs. Atualmente, tal teoria encontra-se já bem desenvolvida no caso de sistemas dinâmicos contínuos. Porém, como veremos a seguir, o modelo de oscilações sísmicas que estudaremos é dado por um sistema de EDOs descontínuo. Em problemas como estes, a Teoria Qualitativa para sistemas contínuos não pode ser aplicada diretamente.

Desta forma, nos últimos tempos, tem crescido o estudo de sistemas de EDOs não-suaves (descontínuo, não-diferenciável e etc). Chamamos tais sistemas de *sistemas suaves por partes*, ou ainda, de *sistemas de Filippov* por conta do trabalho [1] onde o matemático A. F. Filippov estabeleceu métodos para resolver tais sistemas diferenciais, que foram adotados como padrão.

Em 1996, os autores Sotomayor e Texeira no trabalho [2] desenvolveram um *método de regularização* para estudar campos descontínuos. A ideia no método de regularização é criar uma família a um parâmetro ε de campos de vetores contínuos $Z_\varepsilon(x)$ que é uma aproximação do campo descontínuo original. A vantagem deste método reside no fato de que o campo regularizado é um campo suave para o qual pode-se aplicar toda a teoria clássica conhecida.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma utilização deste método no estudo de um modelo de controle automático de oscilações sísmicas sobre um bloco de concreto.

2 Modelo automático para abalos sísmicos

Vamos considerar um bloco com dimensões H e B como na figura 1 e vamos assumir que os centros de gravidade e geométrico do bloco coincidem e estão a uma distância R de todos os vértices do bloco. Além disso, g e a_H indicados na figura 1 são as acelerações da gravidade e do terremoto, respectivamente. Também vamos assumir que não há deslizamento do bloco ou saltos e que as únicas formas de ocorrer uma rotação são sobre os pontos O ou O'. Quando houver uma rotação, denotaremos por αx o deslocamento angular do bloco, onde $x > 0$ corresponde a uma rotação sobre o ponto O e $x < 0$ corresponde a uma rotação sobre o ponto O', e α é o ângulo do bloco em relação ao chão o qual satisfaz que $\operatorname{tg}\alpha = B/H$.

[1]murilos_penteado@hotmail.com
[2]pedro.cardin@unesp.br

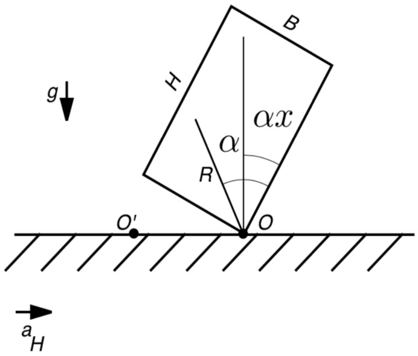

Figura 1: Modelo de oscilações sísmicas no bloco.

Sob essas condições, é possível encontrar a equação de energia do problema, a qual é dada por $a_H = \beta\alpha g\cos(\Omega\tau+\phi)$, onde β é a amplitude adimensional, Ω a frequência, τ o tempo e ϕ o ângulo de fase que neste caso iremos fixá-lo como zero. Se o momento de virada da aceleração do terremoto for maior que o momento de restauração da gravidade, então o bloco tombará. Logo, se $\beta > \alpha^{-1}\operatorname{tg}\alpha$ na equação acima, o bloco se partirá. Se consideramos blocos estreitos, $\alpha \ll 1$, a condição para que o bloco se parta se torna $\beta > 1$. Tomando momentos sobre os pontos O e O', temos que as equações que governam o movimento do bloco em relação a esses pontos são dadas, respectivamente, por $\alpha x'' + \operatorname{sen}[\alpha(1-x)] = -\alpha\beta\cos[\alpha(1-x)]\cos\omega t$ e $\alpha x'' - \operatorname{sen}[\alpha(1+x)] = -\alpha\beta\cos[\alpha(1+x)]\cos\omega t$, onde $\omega = \Omega/p$ é a frequência adimensional, p é a frequência e $t = p\tau$ o tempo adimensional. Já no momento de impacto, a perda de energia é representada por um simples coeficiente de restituição $r \in [0,1]$, e assim $x'(t^A) = rx'(t^B)$, onde t^A é o tempo após o impacto e t^B o tempo antes do impacto. Ao considerarmos um bloco estreito, temos as seguintes equações $x'' - x - 1 = -\beta\cos\omega t$, para $x < 0$, e $x'' - x + 1 = -\beta\cos\omega t$, para $x > 0$.

Para realizarmos a análise qualitativa desse modelo, iremos considerar o caso particular $\alpha \ll 1$, $\beta = 0$, $r = 1$ e $\cos\omega t = 1$. Assim, $x'(t^A) = x'(t^B)$ e as equações de movimento do bloco se tornam $x'' = x + 1$, para $x < 0$, e $x'' = x - 1$, para $x > 0$. Tomando $x' = y$, obtemos que o movimento do bloco é descrito pelo seguinte sistema descontínuo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{cases} X(x,y) & \text{se} \quad x < 0 \\ Y(x,y) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

onde $X(x,y) = (y, x+1)$ e $Y(x,y) = (y, x-1)$. O sistema regularizado de (1) é dado por

$$(x', y') = Z_\varepsilon(x,y) = (y, x - 1 + 2\varphi(x/\varepsilon)) \tag{2}$$

onde φ é chamada de *função de transição*, que é uma função satisfazendo as seguintes propriedades: $\varphi(t) = 0$ se $t \leq -1$, $\varphi(t) = 1$ se $t \geq 1$ e $\varphi'(t) > 0$ se $t \in (-1,1)$.

Neste trabalho, faremos um estudo qualitativo do sistema regularizado (2)

Referências

[1] Filippov, A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1988).

[2] Sotomayor, J. and Teixeira, M. A. *Regularization of Discontinuous Vector Fields*, International Conference of Differential Equations, Lisboa 207-223, 1996.

[3] Vergès, M. C. *Regularização e Análise Qualitativa de Modelos da Teoria do Controle*, Dissertação de Mestrado, Unicamp, 2003.