

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo de um Modelo Matemático para a Dinâmica Populacional do Vetor *Aedes Aegypti*

Priscila Martins Barbosa¹

Lillia dos Santos Barsante²

Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, CEFET- MG, Belo Horizonte, MG

José Luiz Acebal Fernandes³

Departamento de Física e Matemática, CEFET- MG, Belo Horizonte, MG

Álvaro Eduardo Eiras⁴

Departamento de Parasitologia, UFMG, Belo Horizonte, MG

Resumo. O *Aedes aegypti* é o vetor de várias doenças, dentre elas a dengue, chikungunya e o zika vírus. A Organização Mundial da Saúde (OMS) estima que de 50 a 100 milhões de pessoas são infectadas com a pandemia dengue em mais de 100 países. Já a febre chikungunya, tem afetado milhões de pessoas e estudos indicam que o zika vírus está associado ao grande aumento de microcefalia [4]. O desenvolvimento de modelos matemáticos que descrevem a ecologia do vetor e epidemiologia dos vírus, tem aumentado sua importância. Neste sentido, um modelo de dinâmica populacional de mosquitos *A. aegypti* é proposto neste trabalho, a fim de prever seu grau de infestação baseado em dados meteorológicos. É feito um estudo analítico do modelo e explicitados seus pontos de equilíbrio e estabilidade. Através da solução numérica, os resultados são comparados com dados experimentais de *Índice Médio de Fêmeas Aedes* da cidade de Lavras (Minas Gerais, Brasil).

Palavras-chave. Modelo, Temperatura, Pluviosidade, *Aedes aegypti*.

1 Introdução

As arboviroses dengue, chikungunya e zika vírus são doenças infecciosas causadas pela picada da fêmea do *Aedes* infectada, tendo como principal vetor de importância epidemiológica na transmissão nas Américas, o *Aedes aegypti*.

No Brasil, os dados do boletim epidemiológico relativo a 2015 (04/01/2015 a 02/01/2016) indicam que foram registrados 1.649.008 casos notificados de dengue, 20.661 casos autóctones suspeitos de febre chikungunya e 19 Unidades da Federação confirmaram laboratorialmente autoctonia do zika vírus [3]. Segundo [5] a incidência de casos de dengue varia juntamente

¹priscila.pacto@gmail.com

²lilliabarsante@gmail.com

³acebal@dppg.cefetmg.br

⁴alvaro.eiras@gmail.com

com as condições climáticas e está relacionada, principalmente, com o aumento de temperatura e pluviosidade, já que estes fatores favorecem o desenvolvimento do vetor e o aumento da quantidade de criadouros disponíveis. Assim sendo, considerar as influências da temperatura e da pluviosidade é de suma importância para desenvolver um modelo matemático capaz de simular todas as populações do vetor.

2 Modelo Matemático

O modelo que descreve a dinâmica da população do *A. aegypti* abordado neste trabalho é baseado nos trabalhos de [1] e [2]. A alteração é representada pela inserção da população de machos, como feita em [6], tendo com principal intuito uma melhor reprodução dos dados experimentais, na população de fêmea pós-repasto sanguíneo. Desta forma, a dinâmica populacional (Figura 1) é dada pelos ambientes:

- Aquático, que compreende a fase imatura do vetor. Neste ambiente, a população de ovos é representada por $E(t)$ e a população aquática (larvas e pupas) é representada por $A(t)$.
- Alado, representado pela fase adulta do vetor. As populações consideradas são: fêmeas pré-repasto sanguíneo $F_1(t)$, machos $M(t)$ e fêmeas pós-repasto sanguíneo $F_2(t)$.

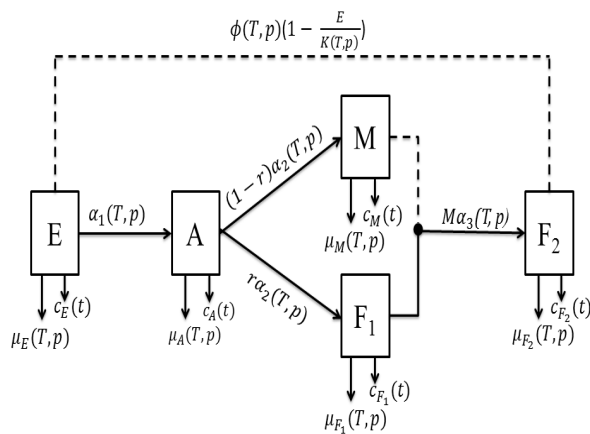


Figura 1: Diagrama da dinâmica populacional do *Aedes aegypti*.

Nesta dinâmica foram considerados os seguintes parâmetros: ϕ - taxa de oviposição por unidade de indivíduos F_2 ; α_1 - taxa por unidade de indivíduo da população $E(t)$ que passa para a população $A(t)$; α_2 - taxa por unidade de indivíduo da população $A(t)$ que passa para a fase alada, $F_1(t)$ ou $M(t)$; α_3 - taxa de copulação entre as populações $F_1(t)$ e $M(t)$; K - capacidade do meio; μ - taxa de mortalidade natural da respectiva população; c - taxa de controle adicional da respectiva população; r - taxa da população $A(t)$ que se torna $F_1(t)$ e $(1 - r)$ que se torna a população $M(t)$.

O modelo proposto descreve a dependência destes parâmetros com a temperatura (T) e a pluviosidade (p) na dinâmica populacional do vetor $A. aegypti$ e é apresentado através de um sistema dinâmico não-linear composto por cinco equações diferenciais, dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE}{dt} = \phi(T,p)\left(1 - \frac{E}{K(T,p)}\right)F_2(t) - \alpha_1(T,p)E(t) - \mu_E(T,p)E(t) - c_E(t)E(t) \\ \frac{dA}{dt} = \alpha_1(T,p)E(t) - \alpha_2(T,p)A(t) - \mu_A(T,p)A(t) - c_A(t)A(t) \\ \frac{dM}{dt} = (1-r)\alpha_2(T,p)A(t) - \mu_M(T,p)M(t) - c_M(t)M(t) \\ \frac{dF_1}{dt} = r\alpha_2(T,p)A(t) - \alpha_3(T,p)M(t)F_1(t) - \mu_{F_1}(T,p)F_1(t) - c_{F_1}(t)F_1(t) \\ \frac{dF_2}{dt} = \alpha_3(T,p)M(t)F_1(t) - \mu_{F_2}(T,p)F_2(t) - c_{F_2}(t)F_2(t), \\ \phi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu_E, \mu_A, \mu_{F_1}, \mu_{F_2}, \mu_M, r, c_E, c_A, c_M, c_{F_1}, c_{F_2}, T, p, \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \quad (1)$$

Considerando o sistema (1) invariante no tempo, determinamos de forma analítica e sistemática seus pontos de equilíbrio. Desta forma, obtemos três pontos de equilíbrio, o ponto crítico trivial P_0

$$(E^*, A^*, M^*, F_1^*, F_2^*) = \left\{ \begin{array}{l} E^* = 0 \\ A^* = 0 \\ M^* = 0 \\ F_1^* = 0 \\ F_2^* = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

o ponto crítico não trivial P_1

$$(E^{**}, A^{**}, M^{**}, F_1^{**}, F_2^{**}) = \left\{ \begin{array}{l} E^{**} = \frac{R + \sqrt{R^2 - 4S}}{2} \\ A^{**} = \frac{\alpha_1(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)} \\ M^{**} = \frac{(1-r)\alpha_2\alpha_1(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\mu_M + c_M)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)} \\ F_1^{**} = \frac{(r\alpha_2\alpha_1(R + \sqrt{R^2 - 4S})(\mu_M + c_M))}{[\alpha_3(1-r)\alpha_2\alpha_1(R + \sqrt{R^2 - 4S} + (\mu_{F_1} + c_{F_1})2(\mu_M + c_M)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)]} \\ F_2^{**} = \frac{2K(R + \sqrt{R^2 - 4S})(\alpha_1 + \mu_E + c_E)}{\phi(2K - R + \sqrt{R^2 - 4S})} \end{array} \right. \quad (3)$$

4

e o ponto crítico não trivial P_2

$$(E^{***}, A^{***}, M^{***}, F_1^{***}, F_2^{***}) = \begin{cases} E^{**} &= \frac{R - \sqrt{R^2 - 4S}}{2} \\ A^{**} &= \frac{\alpha_1(R - \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)} \\ M^{**} &= \frac{(1-r)\alpha_2\alpha_1(R - \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\mu_M + c_M)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)} \\ F_1^{**} &= \frac{(r\alpha_2\alpha_1(R - \sqrt{R^2 - 4S})(\mu_M + c_M))}{[\alpha_3(1-r)\alpha_2\alpha_1(R - \sqrt{R^2 - 4S}) + (\mu_{F_1} + c_{F_1})2(\mu_M + c_M)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)]} \\ F_2^{**} &= \frac{2K(R - \sqrt{R^2 - 4S})(\alpha_1 + \mu_E + c_E)}{\phi(2K - R - \sqrt{R^2 - 4S})} \end{cases} \quad (4)$$

em que

$$R = \frac{K[\phi r \alpha_1 \alpha_2 - (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\mu_{F_2} + c_{F_2})(\alpha_2 + \mu_A + c_A)]}{\phi \alpha_3 r \alpha_2 \alpha_1}$$

e

$$S = \frac{K(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\mu_{F_2} + c_{F_2})(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\alpha_2 + \mu_A + c_A)^2}{\phi \alpha_3 (1-r)r \alpha_2^2 \alpha_1^2}.$$

Os parâmetros do sistema (1) são dependentes da temperatura ($^{\circ}C$) e da pluviosidade (mm) [2], sendo esta dependência indicada por:

$$\Pi = \Pi_1(T) + \Pi_2(p),$$

$$\Pi_1(T) = a + b(T + c)^2 \text{ e } \Pi_2(p) = \Pi_{2min} + \frac{(\Pi_{2max} - \Pi_{2min})}{(p_{max} - p_{min})^r} (p - p_{min})^r$$

em que Π representa genericamente os parâmetros entomológicos do sistema (1); a , b e $c \in \mathbb{R}$; Π_{2min} e Π_{2max} representam, respectivamente, o valor mínimo e o valor máximo de cada parâmetro; $r \in [0, 1]$; p_{min} e p_{max} representam, respectivamente, a pluviosidade mínima e máxima de uma região.

3 Resultados

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz nos diz que a análise da estabilidade dos pontos críticos são determinados pelo sinal dos autovalores associados à matriz jacobiana

do sistema. Sendo assim, foi constatado que o ponto crítico não trivial P_0 é sempre estável, uma vez que todas as raízes do polinômio característico são negativas. O estudo realizado nos pontos críticos não triviais, foi feito através de simulação computacional, visto que a resolução analítica é de alta complexidade. Feita a análise constatamos que o ponto crítico não trivial P_1 é instável, assim como o ponto crítico não trivial P_2 .

Para simular a dinâmica das populações do sistema (1), utilizou-se o Método Runge-Kutta de quarta ordem. Na parametrização, utilizamos $r = 0,4$ para os parâmetros $\phi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e para os demais parâmetros foi adotado uma dependência linear. Os valores mínimos e máximos dos coeficientes entomológicos do sistema (1) são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1: Faixa de parâmetros adotados no sistema (1).

Parâmetro (<i>dias</i> ⁻¹)	Faixa
ϕ	0,56 - 11,2
α_1	0,01 - 0,5
α_2	0,06 - 0,16
α_3	0,2 - 0,2
K	1 - 3
μ_E	0,01 - 0,01
μ_A	0,164 - 0,164
μ_M	0,043 - 0,17
μ_{F_1}	0,043 - 0,17
μ_{F_2}	0,057 - 0,17
c_{E,A,M,F_1,F_2}	0 - 0

A validação da população F_2 foi feita com dados amostrais de *Índice Médio de Fêmeas Aedes aegypti - IMFA* capturadas pela armadilha MosquiTRAP[®] na cidade de Lavras (Minas Gerais, Brasil) durante as semanas 9 – 52 do ano de 2009 e 1 – 52 do ano de 2010. Estes dados amostrais de *IMFA* foram monitorados pelo MI-Dengue (Ecovec SA) por meio das armadilhas MosquiTRAPs[®]. Os dados amostrais de pluviosidade acumulada semanalmente e de temperatura média referente ao horizonte de estudo foram obtidos do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE, Brasil). A escala temporal deste sistema foi dada em unidades da semana epidemiológica do horizonte de estudo. Adotamos as coordenadas do ponto de equilíbrio não trivial P_2 da primeira semana epidemiológica como valor de condição inicial do sistema (1).

Analisando a figura 2(a-e), observamos que as populações $E(t)$, $A(t)$ e $F_1(t)$, sofrem grande influência da pluviosidade, visto que os picos destas populações coincidem com os picos da pluviosidade. A população de machos $M(t)$ sofre algumas variações com o aumento de pluviosidade, porém com menor variação na população. Na população $F_2(t)$, também há semelhança, entre os picos e os índices de pluviosidade, porém, observa-se que em um longo período de chuva, há pouca variação a população. A comparação entre

o *IMFA* e a população $F_2(t)$ pode ser entendida como a validação do modelo (figura 2(f)). Através de uma função de correlação S^2 , foi feito um estudo das áreas sob as curvas geradas. O ajuste do eixo x foi realizado pelo método dos mínimos quadrados, com $S^2 = (IMFA - \lambda F_2)^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, afim de comparar a área entre as curvas. O valor de S^2 determinado na simulação foi $S^2 = 0,0172$. A análise é feita apenas de forma qualitativa, já que os dados amostrais de *IMFA* são coletados semanalmente, e a partir daí identificamos as coincidências ocorridas nos picos das curvas.

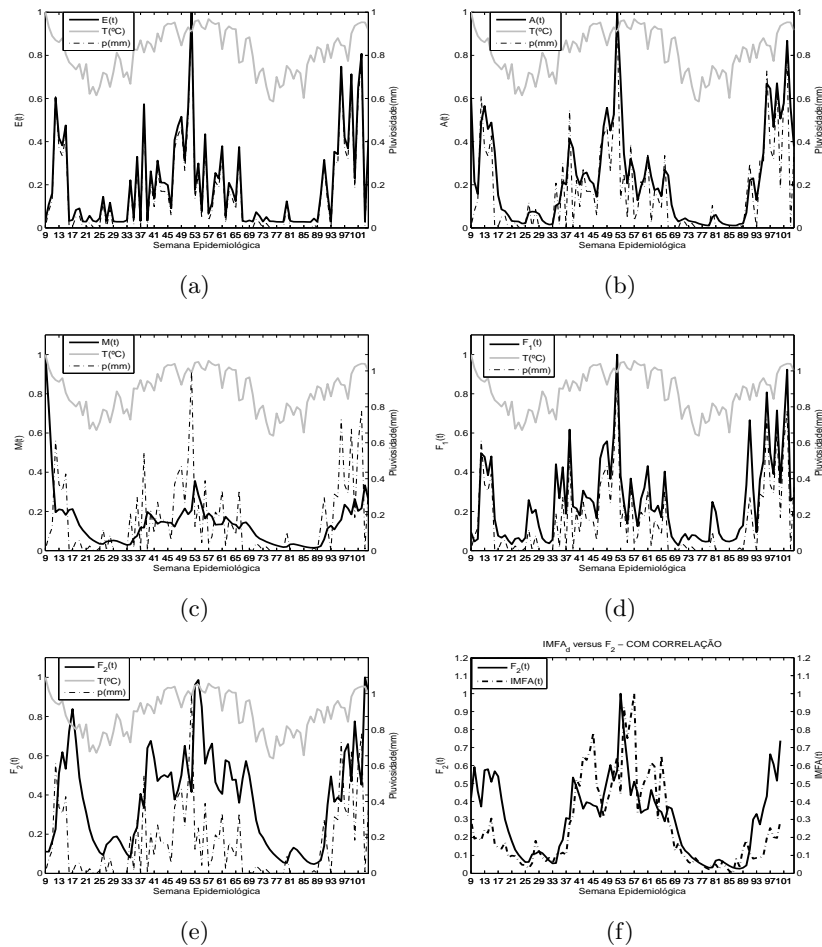


Figura 2: Comportamento do sistema (1) diante da variação da pluviosidade acumulada semanalmente e da temperatura média para a cidade de Lavras (Minas Gerais, Brasil) no período de estudo.

4 Conclusões

O modelo descreve bem a dinâmica populacional do *A. aegypti* sendo capaz de aferir o risco de suas arboviroses em determinada região. A determinação dos pontos críticos e os

respectivos polinômios característicos, nos mostraram o quão se tornou inviável a análise analítica do sistema. A inserção da população de machos, resultou em uma melhora significativa em relação ao modelo de [2], principalmente na população fêmeas pós-repasto sanguíneo. Desta maneira, a principal contribuição deste trabalho para a área, consiste em nortear os programas de controle deste vetor, por meio da interpretação dos dados de temperatura e pluviosidade, minimizando assim os gastos com saúde pública.

Agradecimentos

Agradecemos ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET-MG pelo incentivo, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e à Fundação de Ampara à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] L. S. Barsante. Dependência entre pluviosidade e população de fêmeas *Aedes aegypti* grávidas descritas através de um sistema dinâmico não linear, Dissertação de Mestrado, CEFET-MG, 2012.
- [2] F. S. Cordeiro. Modelo preditivo para a população de mosquitos *Aedes aegypti* sob influência de variáveis climáticas: temperatura e pluviosidade, Dissertação de Mestrado, CEFET-MG, 2014.
- [3] Ministério da Saúde. Brasil. Boletim Epidemiológico, vol. 47, 2016.
- [4] Ministerio da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. Protocolo de Vigilância e Resposta à ocorrência de microcefalia relacionada à infecção pelo vírus Zika, 2015.
- [5] A. F. Ribeiro, G. R. A. M Marques, J. C. Voltolini e M. L. F. Condino, Associação entre incidência de dengue e variáveis climáticas. *Revista da Saúde Pública*, 40(4):671-676, 2006.
- [6] H. M. Yang, M. L. G, Macoris, K. C. Galvani, M. T. Andrighetti, Dinâmica da Transmissão da dengue com dados entomológicos temperatura-dependentes, *TEMA*, 8(1):159-168, 2007.
- [7] L. T. Takahashi, Modelos matemáticos de epidemiologia com vetores: simulação da propagação urbana e geográfica da dengue. Tese de Doutorado, IMECC/UNICAMP, 2004.