Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Controle de um Levitador Magnético com Atenuação de Distúrbio

Leandro José Elias[1]
Área de Ciências e Matemática, IFSP, Araraquara, SP
Flávio Andrade Faria[2]
Depto de Físico Química, UNESP, Araraquara, SP
Pedro Paulo Vieira[3] Vilma A. Oliveira[4]
Depto de Engenharia Elétrica, USP, São Carlos, SP

Resumo. Este trabalho apresenta um projeto de controle robusto para um levitador magnético considerando a variação da massa do objeto a ser levitado. Considera-se também, o problema de rejeição de pertubação para reduzir o efeito de pequenas vibrações na base do levitador.

Palavras-chave. Levitador Magnético, Sistemas não lineares, Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno, Desigualdades Matriciais Lineares.

1 Introdução

Levitadores magnéticos de bancada são muito comuns em laboratórios didáticos de universidades. Esses aparelhos causam grande impacto visual nos estudantes e servem para motivar os estudo de vários princípios fundamentais de eletricidade, eletromagnetismo, eletrodinâmica e teoria de controle [5, 6]. Além disso, a levitação magnética está sendo utilizada com muita frequência em transportes terrestres de alta velocidade, no controle de vibrações de sistemas mecânicos e em bioengenharia [4]. Apesar de sua simplicidade, é possível encontrar na literatura diferentes formas de modelar o problema. Em geral, os modelos diferem de acordo com o tratamento dado a cada variável do sistema. Em [6] é apresentado um modelo no qual a corrente elétrica é tratada como um estado e a entrada de controle é realizada pela tensão no eletroimã. Essa modelagem resulta em um sistema afim de ordem três, em que a gravidade é tratada como uma força externa constante. Como o sistema que representa o levitador é não linear, posteriormente, esse sistema é estudado usando modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS) [1]. Em [3], os autores exploram propriedades de eletricidade para realizar o projeto de controle em função da corrente, eliminando a variável tensão do modelo matemático. Além disso, os autores apresentam um modelo no qual a resultante das forças é proporcional a corrente elétrica necessária para manter um

[1]leandro.elias@ifsp.edu.br
[2]flaviof15@lycos.com
[3]pedro.vieira@usp.br
[4]vilma@sc.usp.br

objeto levitando em uma posição de interesse. Por consequência, o modelo matemático resultante é um sistema linear de ordem dois.

Como [1, 3] realizam a modelagem considerando uma massa constante e o levitador fixo em uma superfície rígida, então neste trabalho é proposto um projeto de controle robusto para um levitador magnético sujeito a vibrações na base. O modelo matemático é desenvolvido com base no resultado apresentado em [3] e a massa do objeto a ser levitado é considerada um parâmetro incerto que pode variar dentro de uma faixa prefixada. O sistema não linear é representado por modelos fuzzy TS [7] e o projeto de controle é realizado usando desigualdades matriciais lineares.

2 Projeto de Controle Fuzzy

Neste trabalho é estudado uma classe de sistemas fuzzy TS representadas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{r_p} \alpha_k h_{ik}(t)\left[\big(A_{ik} - B_{ik}K_k\big)x(t) + E_{ik}w(t)\right] \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{1}$$

sendo α_k parâmetros incertos satisfazendo: $\alpha_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 1$, $p = 2^n$, com n o número de incertezas no modelo, A_{ik}, B_{ik}, E_{ik} e C as matrizes dos modelos locais, K_k os ganhos do controlador de realimentação de estado, r_p o número de modelos locais do sistema fuzzy e $h_{ik}(t)$ são funções não lineares satisfazendo $h_{ik}(t) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{r_p} h_{ik}(t) = 1$, $\forall t$.

Diz-se que o sistema (1) possui nível de atenuação γ se para qualquer entrada limitada $w(t)$ a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\sup \frac{\|y(t)\|}{\|w(t)\|} \leq \gamma. \tag{2}$$

Para estabilização do sistema (1) satisfazendo (2) foi utilizado o seguinte teorema.

Teorema 2.1. *Dado um nível de atenuação γ, os ganhos $K_k = M_k X^{-1}$ que estabilizam o sistema (1) e satisfazem (2) podem ser encontrados resolvendo as seguintes LMIs:*

$$\begin{gathered} X > 0, \\ \begin{bmatrix} a_{11} & -0.5(E_{ik} + E_{jk}) & 0.5X(C_{ik} + C_{jk})' \\ \star & \gamma I & 0 \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \leq j, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \end{gathered} \tag{3}$$

sendo $a_{11} = -0.5(XA'_{ik} - M'_{jk}B'_{ik} + A_{ik}X - B_{ik}M_{jk} + XA'_{jk} - M'_{ik}B'_{jk} + A_{jk}X - B_{jk}M_{ik})$ e $\star$ a matriz bloco simétrica.

Prova: *Multiplicando (3) pelo produto de α_k, $h_{ik}(t)$ e $h_{jk}(t)$, $\forall i, j, k$, e somando todos os termos, obtêm-se:*

$$X > 0,$$
$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{r_p}\sum_{j=1}^{k}\alpha_k h_{ik}(t)h_{jk}(t)\begin{bmatrix} a_{11} & -0.5(E_{ik}+E_{jk}) & 0.5X(C_{ik}+C_{jk})' \\ \star & \gamma I & 0 \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \geq 0,$$

Então a demonstração do teorema segue de forma análoga à [7, pág. 70] usando uma função Lyapunov quadrática.

Os ganhos encontrados pelo Teorema 2.1 nem sempre podem ser implementados na prática devido a magnitude dos valores encontrados. Esses valores podem ser reduzidos utilizando o resultado a seguir.

Teorema 2.2. *Dado um nível de atenuação γ e parâmetros $\sigma > 0$, $\beta > 0$. Os ganhos $K_k = M_k X^{-1}$, com $KK' < \beta I/\sigma^2$, que estabilizam o sistema (1) e satisfazem (2) podem ser encontrados resolvendo as seguintes LMIs:*

$$\begin{gathered} X > \sigma I, \\ \begin{bmatrix} a_{11} & -0.5(E_i+E_j) & 0.5X(C_i+C_j)' \\ \star & \gamma I & 0 \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \leq j \\ \begin{bmatrix} \beta I & M \\ \star & I \end{bmatrix} > 0. \end{gathered} \tag{4}$$

sendo $a_{11} = -0.5(XA'_{ik} - M'_{jk}B'_{ik} + A_{ik}X - B_{ik}M_{jk} + XA'_{jk} - M'_{ik}B'_{jk} + A_{jk}X - B_{jk}M_{ik})$ e $\star$ a matriz bloco simétrica.

Prova: *A demonstração do teorema leva em consideração os argumentos utilizados no Teorema 2.1 e os resultados apresentados em [2, pág. 1264].*

3 Modelo matemático do Levitador

Na Figura 1 é mostrado a configuração do levitador magnético analisado neste trabalho. De acordo com a segunda lei de Newton tem-se a partir da Figura 1 que:

$$m\ddot{y} = -f_k + mg + F(i,y) + w(t), \tag{5}$$

sendo m a massa do objeto, f_k a força de atrito viscoso do ar, g a aceleração da gravidade, $F(i,y)$ a força eletromagnética, L a indutância do eletroímã e $w(t)$ a força externa aplicada na base do levitador.

A força eletromagnética foi obtida considerando o fato de que a posição da bola altera o fluxo magnético no circuito, sendo escrita como [3]:

$$F(i,y) = \frac{-\lambda\mu i^2}{2\left(1+\mu y\right)^2}, \tag{6}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0111

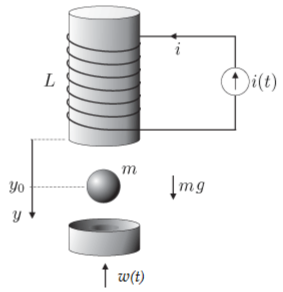


Figura 1: Levitador Magnético.

com λ e μ constantes positivas, i a corrente elétrica no eletroímã e y o deslocamento da bola. A força de atrito viscoso foi tomada da forma $f_k = k\dot{y}$, sendo $k > 0$ o coeficiente de atrito. Nessas condições, a equação de movimento do objeto é dada por:

$$m\ddot{y} = -k\dot{y} + mg - \frac{\lambda\mu i^2}{2\left(1+\mu y\right)^2} + w(t). \tag{7}$$

Definindo como variáveis de estado, $\bar{x}_1 = y$ e $\bar{x}_2 = \dot{y}$ tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= g - \tfrac{k}{m}\bar{x}_2 - \tfrac{\lambda\mu i^2}{2m(1+\mu\bar{x}_1)^2} + \tfrac{1}{m}w(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Como o objetivo é manter a bola numa posição arbitrária $y = y_0$, então substituindo y_0 em (7) obtêm-se

$$i_0^2 = \frac{2}{\lambda\mu}\left(mg + w(t)\right)\left(1+\mu y_0\right)^2. \tag{9}$$

Para a modelagem, o ponto de equilíbrio de interesse é dado por $\bar{x}_e = [y_0, 0]'$. No entanto, a representação fuzzy TS só pode ser aplicada em sistemas (8) quando o ponto de equilíbrio é a origem. Então, realizando a substituição de variáveis $x_1 = \bar{x}_1 - y_0$ e $x_2 = \bar{x}_2$, obtém-se um modelo cujo ponto de equilíbrio foi deslocado para a origem. Além disso, o projeto de controle também considera que:

$$u = i^2 - i_0^2 \Rightarrow i^2 = u + \frac{2}{\lambda\mu}\left(mg + w(t)\right)\left(1+\mu y_0\right)^2. \tag{10}$$

Substituindo (10), $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ em (8), e realizando algumas operações algébricas, o seguinte modelo matemático é encontrado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\mu g(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1+\mu(x_1+y_0))^2} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\lambda\mu/(2m)}{(1+\mu(x_1+y_0))^2} \end{bmatrix} u(t) \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mu x_1}{m}\frac{(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1+\mu(x_1+y_0))^2} \end{bmatrix} w(t). \end{aligned} \tag{11}$$

4 Simulação Numérica

A simulação do sistema (11) foi realizada considerando os parâmetros: $0.0226\,\text{Kg} \leq m \leq 0.05\,\text{Kg}$, $g = 9.8\,m/s^2$, $k = 0.001\,Ns/m$, $\lambda = 0.46\,H$, $\mu = 2\,m^{-1}$ e $y_0 = 0.04\,m$. A representação fuzzy TS do sistema (11), com realimentação de estado $u(t) = -Kx(t)$, é dada por (1) com matrizes:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{1i} = \mathbf{A}_{2i} = \mathbf{A}_{3i} = \mathbf{A}_{4i} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 40.7680 & -\frac{0.001}{m_i} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}_{5i} = \mathbf{A}_{6i} = \mathbf{A}_{7i} = \mathbf{A}_{8i} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 27.6024 & -\frac{0.001}{m_i} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}_{1i} = \mathbf{B}_{2i} = \mathbf{B}_{5i} = \mathbf{B}_{6i} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{0.2722}{m_i} \end{bmatrix}, &\quad \mathbf{B}_{3i} = \mathbf{B}_{4i} = \mathbf{B}_{7i} = \mathbf{B}_{8i} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{0.46}{m_i} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{E}_{1i} = \mathbf{E}_{3i} = \mathbf{E}_{5i} = \mathbf{E}_{7i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{0.3098}{mi} \end{bmatrix}, &\quad \mathbf{E}_{2i} = \mathbf{E}_{4i} = \mathbf{E}_{6i} = \mathbf{E}_{8i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-0.1664}{mi} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

sendo $i = 1, 2$; $m_1 = 0.0226\,\text{Kg}$ e $m_2 = 0.05\,\text{Kg}$.

Para o projeto de controle robusto foram consideradas as LMIs dos Teoremas 2.1 e 2.2, com parâmetros $\gamma = 0.7071$, $\beta = 200$ e $\sigma = 0.2$. Para a simulação foram tomados os valores de $m = 0.035\,\text{Kg}$, condição inicial $x_0 = [0.02 \quad 0]'$ e $w(t) = 0.03\text{sen}(10\pi t)$. Os resultados das simulações podem ser vistos nas Figuras 2 e 3.

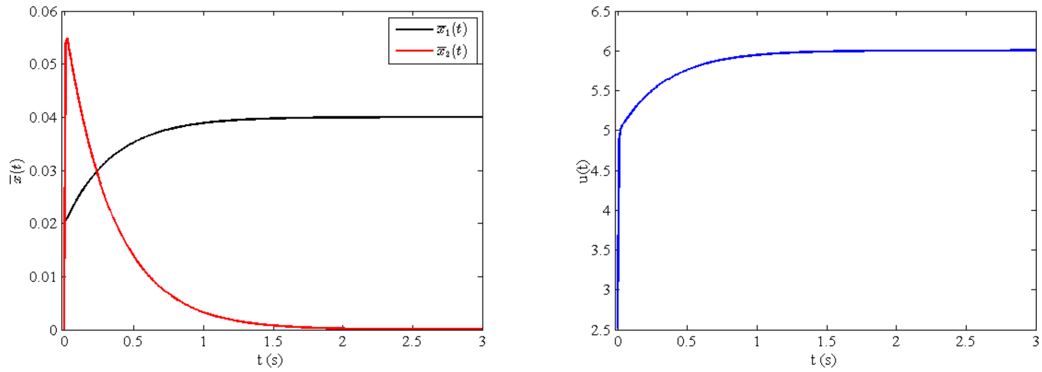
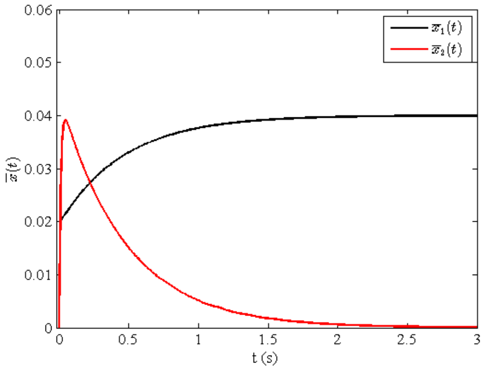


Figura 2: Estabilização com o Teorema 2.1 ($m = 0.035\,\text{Kg}$): estado $\bar{x}(t)$ (esquerda), sinal de controle $u(t)$ (direita). A perturbação $w(t)$ foi adicionada a partir de $t = 1s$.



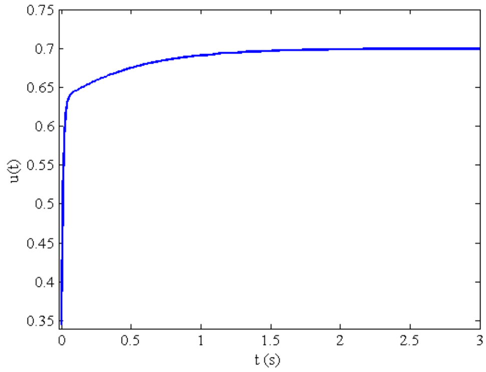


Figura 3: Estabilização com o Teorema 2.2 ($m = 0.035\,$Kg): estado $\bar{x}(t)$ (esquerda), sinal de controle $u(t)$ (direita). A perturbação $w(t)$ foi adicionada a partir de $t = 1s$.

A Tabela 1 mostra os valores dos ganhos encontrados pelos Teoremas 2.1 e 2.2. Verifica-se que os valores em módulo dos ganhos obtidos pelo Teoremas 2.2 são menores como esperado.

Tabela 1: Ganhos encontrados

Teorema 2.1	**Teorema 2.2**
$K_1 = [-229.8339 \quad -78.1616]$	$K_1 = [-22.7757 \quad -8.6922]$
$K_2 = [-84.1839 \quad -27.9563]$	$K_2 = [-19.9426 \quad -7.5255]$
$K_3 = [-140.9902 \quad -47.9387]$	$K_3 = [-14.9038 \quad -5.7257]$
$K_4 = [-52.1303 \quad -17.2785]$	$K_4 = [-19.9702 \quad -7.9485]$
$K_5 = [-228.7529 \quad -78.1142]$	$K_5 = [-21.1117 \quad -8.3610]$
$K_6 = [-83.5757 \quad -28.0350]$	$K_6 = [-8.6128 \quad -2.8843]$
$K_7 = [-139.8030 \quad -47.7659]$	$K_7 = [-15.0021 \quad -6.0991]$
$K_8 = [-51.3940 \quad -17.2697]$	$K_8 = [-15.6053 \quad -6.3940]$

5 Conclusões

A representação do sistema não linear pelo sistema fuzzy TS permitiu a realização do projeto de controle usando LMIs. LMIs facilitam a inclusão de incertezas paramétricas no projeto do controlador usando o conceito de convexidade. Como o Teorema 2.1 fornece condições para a estabilização de sistemas não lineares sem impor nenhuma restrição nos ganhos do controlador, então é adicionada as condições LMI propostas em [2] para reduzir a magnitude dos ganhos. Pela Tabela 1 é fácil verificar a eficiência do Teorema 2.2 na redução dos ganhos. Em alguns casos o valor da componente matricial chega a ser dez vezes menor. Além disso, todos os ganhos encontrados pelo Teorema 2.2 estão com uma magnitude equivalente aos apresentados em [3], mas com a vantagem de garantir um bom nível de atenuação de distúrbios.

Observa-se pelas Figuras 2 e 3 que houve um aumento no tempo de estabelecimento do sistema controlado com os ganhos do Teorema 2.2. Essa pequena deterioração no tempo de estabelecimento não é o suficiente para comprometer o desempenho do sistema controlado. Por outro lado, o valor dos ganhos podem comprometer a implementação prática. Dessa forma, é necessário executar vários testes com o Teorema 2.2 a fim de se encontrar um ganho que satisfaça as restrições de desempenho impostas ao projeto de controle e que seja implementável na prática. Os parâmetro de projeto μ, γ, β e σ oferecem graus de liberdade para o projetista obter o desempenho desejado.

Assim, o trabalho proposto contribuiu para o projeto de controladores para um levitador magnético de bancada. Os resultados permitem que qualquer objeto com uma massa pré-especificada permaneça levitando em um ponto de interesse e asseguram a levitação do objeto mesmo que o levitador sofra pequenas vibrações na base.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq.

Referências

[1] N. S. D. Arrifano, V. A. Oliveira, and L. V. Cossi. Synthesis of an LMI-based fuzzy control system with guaranteed cost performance: A piecewise Lyapunov approach. *Controle & Automação*, 17(2):213–225, 2006.

[2] E. Assunção, M. C. M. Teixeira, F. A. Faria, N. A. P. da Silva, and R. Cardim. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, 80(8):1260–1270, 2007.

[3] R. Cardim, M. C. M. Teixeira, E. Assunção, F. A. Faria, and M. R. Covacic. Controle de um levitador magnético utilizando modelos fuzzy e derivada de estados da planta. In *VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, pages 1–6, Florianópolis, SC, Brasil, 2007.

[4] M. Golob and B. Tovornik. Modeling and control of the magnetic suspension system. *ISA Transactions*, 42(1):89–100, 2003.

[5] W. Hurley and W.H. Wolfle. Electromagnetic design of a magnetic suspension system. *IEEE Transactions on Education*, 40(2):124–130, 1997.

[6] V. A. Oliveira, E. F. Costa, and J. B. Vargas. Digital implementation of a magnetic suspension control system for laboratory experiments. *IEEE Transactions on Education*, 42(4):315–322, 1999.

[7] K. Tanaka and H. O. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach.* John Wiley and Sons, 2001.

