Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Sequências: Intervalares e Fuzzy

Gino Gustavo Maqui Huamán[1]

Departamento de Matemática Aplicada, UNESP, São José do Rio Preto, SP

Ulcilea Alves Severino Leal[2]

Universidade Federal do Triângulo Minero, UFTM, Iturama, MG

Geraldo Nunes Silva[3]

Departamento de Matemática Aplicada, UNESP, São José do Rio Preto, SP

Resumo. Este trabalho apresenta um dos conceitos elementares da análise intervalar e da matemática fuzzy, objetivando-se mostrar aplicações e implicações das aritméticas intervalares no contexto fuzzy. Neste contexto, será apresentado sequências intervalares, convergência e suas propriedades, e posteriormente, estendidas no contexto fuzzy. Além disso, será exemplificado a influência das aritméticas intervalares no princípio de extensão de Zadeh. Finalmente, serão estudadas as sequências de números fuzzy.

Palavras-chave. Aritmética Intervalar, Princípio de Extensão de Zadeh, Sequências Fuzzy.

1 Introdução

A análise intervalar e a teoria dos conjuntos fuzzy são disciplinas matemáticas relativamente novas, difundidas e criadas por R. E. Moore e L. A. Zadeh, respectivamente. Moore com seu livro em análise intervalar [7] em 1966 e Zadeh com seu original e influente artigo sobre teoria de conjuntos fuzzy [8] em 1965, estes trabalhos, com o passar do tempo, mostraram uma conexão entre estas áreas na matemática das incertezas. R.E. Moore junto com seus colaboradores aportaram ao desenvolvimento da análise no contexto intervalar, começando com a computação científica, equações diferenciais, análise funcional, otimização global e álgebra linear intervalar. Alguns destes resultados foram utilizados no desenvolvimento da teoria Fuzzy, como também, resultados do contexto fuzzy foram utilizados no contexto intervalar. Isto pode ser evidenciado em *Interval and fuzzy analysis : A unified approach* de W. A. Lodwick [5], por outro lado a aritmética encontrada em Moore [7] produz uma sobre-estimação nos cálculos, ver [3], fato que motivou o nosso interesse em estudar outra estrutura algébrica intervalar e aplicar-a as sequencias intervalares e fuzzy.

[1]ginomaqui@gmail.com
[2]ulcilea0803@hotmail.com
[3]gsilva@ibilce.unesp.br

2 Espaço Intervalar

Esta seção apresenta definições básicas da análise intervalar e algumas propriedades destas, onde essas podem ser encontradas com maior detalhe em [7], [5], [6].

Definição 2.1. *(Maqui [6]) Chama-se de subespaço intervalar próprio real ao conjunto* $\mathbb{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *de modo que os elementos de* $\mathbb{I}$ *sejam da forma* $[\underline{a}, \overline{a}] = \{z \in \mathbb{R}; \underline{a} \leq z \leq \overline{a}\}$*. Em geral, diz que,* $\mathbb{I}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *é o subespaço intervalar próprio n-dimensional, sendo este definido pelo produto cartesiano de n subespaços intervalares próprios reais, isto é,* $\underbrace{\mathbb{I} \times ... \times \mathbb{I}}_{n-vezes}$*; os elementos deste conjunto são denominados de vetores intervalares n-dimensionais e serão denotados por uma n-upla intervalar do tipo* $(X_1, X_2, ..., X_n)$*, onde* $X_i \in \mathbb{I},\ \forall i = 1, 2, ..., n$*.*

Chama-se de *Intervalo degenerado* ao intervalo $X = [\underline{a}, \overline{a}] \in \mathbb{I}$ onde $\underline{a} = \overline{a}$.

Definição 2.2. *(Lodwick [5]) Um intervalo* $A = [\underline{a}, \overline{a}]$*, é o grafo de uma função real* $A^I(\lambda_a)$*, onde:*

$$A^I(\lambda_a) = \underline{a} + \lambda_a(\overline{a} - \underline{a});\ \lambda_a \in [0, 1] \tag{1}$$

Estritamente falando, em (1) como os números $\underline{a}$ e $\overline{a}$ são conhecidos, eles serão coeficientes, enquanto λ_a esta variando entre 0 e 1. $A^I(\lambda_a)$ sera chamada de função restrição associada ao intervalo A. Para simplificar a notação escreveremos $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, ...$ para denotar aos parâmetros associados a cada intervalo. Assim a representação paramétrica restrita de um intervalo A será:

$$A = [\underline{a}, \overline{a}] = \{a(\lambda) = \underline{a} + \lambda_a(\overline{a} - \underline{a});\ \lambda_a \in [0, 1]\}$$

Todo elemento A de $\mathbb{I}$ tem associado uma função restrição. Sobre o espaço $\mathbb{I}$ são definidas algumas aritméticas que, pelo geral, são utilizadas nos contextos intervalares e fuzzy. Com uma estrutura métrica neste espaço, o conceito de convergência de sequências intervalares serão analisados.

2.1 Operações Aritméticas

Consideremos dois intervalos $A = \{a(\lambda_1) : \lambda_1 \in [0, 1]\}$ e $B = \{b(\lambda_2) : \lambda_2 \in [0, 1]\}$, então:

$$\begin{aligned} A \circledast B = C = [\underline{c}, \overline{c}] &= \{a(\lambda_1) * b(\lambda_2)\ :\ \lambda_1, \lambda_2 \in \delta\} \\ &= \{c\ :\ c = a(\lambda_1) * b(\lambda_2),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \delta\} \\ \text{onde } \underline{c} = \ \min\{c\},\ \ \overline{c} &= \max\{c\},\ \delta \subset \mathbb{R} \\ \text{e } * \ &\in \{+, -, \times, \div\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Definição 2.3 (Aritmética Intervalar Restrita - CIA)**.** *Dados* $A, B \in \mathbb{I}$ *esta aritmética fica determinada quando em (2)* $\delta = [0, 1]$*.*

Definição 2.4 (Aritmética Intervalar Standard - SIA)**.** *Dados* $A, B \in \mathbb{I}$ *esta aritmética fica determinada quando em (2)* $\delta = \{0, 1\}$*.*

Definição 2.5 (Aritmética Intervalar Restrita em Níveis Simples - SLCIA). *esta aritmética fica determinada quando em (2)* $\lambda_1 = \lambda_2$ *e* $\delta = [0, 1]$.

Definição 2.6. *Dados* $A, B \in \mathbb{I}$ *a métrica de Pompeiu-Hausdorff é definida por* $H : \mathbb{I}\times\mathbb{I} \to \mathbb{R}_0^+$*, tal que:*

$$H(A, B) = \max\{d_1(A, B), d_1(B, A)\},$$

onde, $d_1 : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}_0^+$ *dado por:*

$$d_1(A, B) = \sup_{a\in A} d_2(a, B)$$

é uma quase métrica, e $d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}_0^+$ *é dado por*

$$d_2(a, B) = \inf_{b\in B} d_3(a, b)$$

com d_3 *distância euclideana.*

Equivalente a esta métrica tem-se a métrica d, onde dados $A, B \in \mathbb{I}$, $d : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}_0^+$ é definida por:

$$d(A, B) = \max_{\lambda\in[0,1]} |A(\lambda) - B(\lambda)|\,,$$

onde $A(\lambda), B(\lambda)$ são as funções restrição associadas a A e B, respectivamente, ver (Chalco-Cano, et al. [4]).

Definição 2.7. *(Maqui [6]) Seja* $\mathbb{I}$ *o espaço intervalar próprio. Uma sequência em* $\mathbb{I}$ *é uma aplicação* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{I}$*. Onde,* φ *é denotada por:*

$$(A_n); \quad (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad ou \quad (A_0, A_1, A_2, ...)$$

e $A_n := \varphi(n)$ *é o n-ésimo termo da sequência* $\varphi = (A_0, A_1, A_2, ...)$.

Definição 2.8. *(Maqui [6]) Dada uma sequência de números intervalares* (A_n); $A_n \in \mathbb{I}, \forall n$ *(não necessariamente monótona), diz-que* A_n *converge para o número intervalar* A*, e escreve-se* $A = \lim A_n$*, quando para cada* $\epsilon > 0$ *dado arbitrariamente, for possível obter um número* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $H(A_n, A) < \epsilon$*, sempre que* $n > n_0$.

Proposição 2.1. *(Maqui [6]) A sequência de números intervalares* (A_n) *é convergente se, e somente se,* (A_n) *é convergente nível a nível. Isto é, a sequência* (A_n) *é convergente nível a nível se, e somente se* $A_n(\lambda)$ *é convergente para cada* $\lambda \in [0, 1]$.

3 Preliminares da Lógica e Matemática Fuzzy

A seguir, apresenta-se conceitos fundamentais, ver [1], [3], para o desenvolvimento de conceitos básicos sobre conjuntos fuzzy utilizando o conceito de α-nível.

Definição 3.1. *(Barros e Bassanezi [1]) Seja* U *um conjunto clássico; um subconjunto fuzzy* F *de* U *é caracterizado por uma função*

$$\mu_F : U \longrightarrow [0, 1]$$

pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy F*. Assim, ao falar sobre conjunto um fuzzy simplesmente será mencionada a sua função de pertinência para referir-se ao conjunto.*

3.1 Níveis de Conjunto Fuzzy

Definição 3.2. *(Chalco et al. [3]) Seja $\mu : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ e $\alpha \in [0,1]$. Define o α-nível de μ como o conjunto:*

$$[\mu]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x) \geq \alpha\}, \ \alpha > 0.$$

Além disso, o Suporte $[\mu]^0$ de um conjunto fuzzy μ é definido por:

$$supp(\mu) = [\mu]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x) > \alpha\}}.$$

Definição 3.3. *(Chalco et al. [3]) Dado um conjunto fuzzy μ em $\mathbb{R}$, diz-que:*

1. *μ é compacto, se $[\mu]^\alpha$ é compacto para todo $\alpha \in [0,1]$;*

2. *μ é convexo, se $[\mu]^\alpha$ é convexo para todo $\alpha \in [0,1]$;*

3. *μ é normal, se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(x) = 1$.*

Denota-se por:

- *$\mathcal{F}(\mathbb{R})$ a família de conjuntos fuzzy compactos e normais.*

- *$\mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ a família de conjuntos fuzzy compactos, convexos e normais, cujos elementos chamaremos de números fuzzy.*

3.2 Operações Algébricas sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

Observe que, se $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, então as operações algébricas usuais entre funções não são adequadas sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Por exemplo, se somar μ_1 e μ_2 ponto a ponto, poderia ocorrer que:

$$(\mu_1 + \mu_2)(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) \notin [0,1].$$

Visando superar essa situação utiliza-se o chamado *princípio de extensão de Zadeh*, como definido a seguir:

Definição 3.4. *(Princípio de extensão de Zadeh)(Barros e Bassanezi [1]) Seja $f : X_1 \times X_2 \to Y$ uma função. f pode ser estendida ao contexto fuzzy por:*

$$\hat{f} : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \to \mathcal{F}(Y)$$

onde:

$$\hat{f}(\mu_1, \mu_2)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2) \in f^{-1}(y)} \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) & se \quad f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & se \quad f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

para cada $y \in Y$.

Mesmo que, o Principio de extensão de Zadeh estenda o conceito de uma função aplicada a um subconjunto clássico de X, em geral, o cálculo de $\hat{f}$ é difícil de ser implementado de maneira prática. Nessa direção, alguns pesquisadores têm desenvolvido métodos para obter uma aproximação para $\hat{f}$, ver [3].

Exemplo 3.1. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = ax + b$ *com* $a \neq 0$*, pode-se obter facilmente* $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ *definida por:* $\hat{f}(\mu)(y) = \mu\left(\dfrac{a}{y-b}\right)$, $\forall \mu \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.1. *(Barros et al. [2]) Sejam* $f : X \to Z$ *uma função contínua e* μ *um subconjunto fuzzy de* X*. Então para todo* $\alpha \in [0, 1]$ *vale*

$$[\hat{f}(\mu)]^{\alpha} = f([\mu]^{\alpha}).$$

Onde $X, Z \subset \mathbb{R}$.Este resultado indica que os α-níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo princípio de extensão, coincidem com as imagens dos α-níveis determinado pela função crisp. Contudo, obter $\hat{f}(\mu)$ utilizando a aritmética intervalar *standard* traz um sério inconveniente, o que acontece nos processos de cálculo com intervalos e é conhecido como efeito de sobrestimação.

Exemplo 3.2. *Considere o número triangular fuzzy* $\mu(1/2; 1; 3/2)$ *onde:*

$$[\mu]^{\alpha} = \left[\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2}\right].$$

Para obter $\mu^2 - 2\mu$*, utiliza-se a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2 - 2x$ *e a partir dai obtêm-se* $\hat{f}(\mu) = \mu^2 - 2\mu$*.*

Ao utilizar a SIA teremos que: $[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[-\dfrac{11}{4}, \dfrac{5}{4}\right]$

Agora, se fatorar a função a ser estendida; isto é, $f(x) = x(x-2)$. Obtém a sua extensão: $\hat{f}(\mu) = \mu(\mu - 2)$. Dessa forma, $[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[-\dfrac{9}{4}, -\dfrac{1}{4}\right]$. Isso gera uma dificuldade, pois não se sabe com qual tipo de expressão trabalhar. Nesse sentido, a próxima proposição mostra que, usar a SLCIA é vantajoso.

Proposição 3.1. *(Maqui [6]) Sejam* A *e* B *números fuzzy com* α*-níveis dados, respectivamente, por* $[A]^{\alpha} = [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}]$ *e* $[B]^{\alpha} = [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}]$*. Então, utilizando a SLCIA valem as seguintes propriedades:*

1. $[A \pm B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} \pm [B]^{\alpha}$;
2. $[\delta A]^{\alpha} = \delta [A]^{\alpha}$;
3. $[A \cdot B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} \cdot [B]^{\alpha}$;
4. $\left[\dfrac{A}{B}\right]^{\alpha} = \dfrac{[A]^{\alpha}}{[B]^{\alpha}} \quad 0 \notin [B]^{\alpha}$.

Onde as operações do lado esquerdo são operações entre conjuntos fuzzy e as do lado direito operações entre intervalos. Considerando o exemplo anterior e aplicando a Teorema 3.1, tem que $[\hat{f}(\mu)]^{\alpha} = f([\mu]^{\alpha})$ é uma função intervalar, e assim, ela pode ser descrita por:

$$f([\mu]^{\alpha}) \quad = \quad f(\left[\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2}\right]) = \left[\min_{\lambda \in [0,1]} \{f_{\lambda}([\mu]^{\alpha})\}, \max_{\lambda \in [0,1]} \{f_{\lambda}([\mu]^{\alpha})\}\right],$$

onde $f_\lambda([\mu]^\alpha) = \left(\frac{1+\alpha}{2} + \lambda(1-\alpha)\right)^2 - 2\left(\frac{1+\alpha}{2} + \lambda(1-\alpha)\right)$.

Destas últimas expressões se considerar o nível zero obtêm-se:

$$f([\mu]^0) \quad = \quad f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[\min_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4}\}, \max_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4}\}\right] = \left[-1, -\frac{3}{4}\right].$$

Assim, ao utilizar a SLCIA pode-se observar que mesmo fatorando a função a ser estendida, obtêm-se o mesmo resultado. Ou seja, $[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[-1, -\frac{3}{4}\right]$ independentemente se $f(x) = x^2 - 2x$ ou $f(x) = x(x-2)$ e, isto é o que se espera quando a função é analisada ponto a ponto.

Uma outra aplicação imediata da SLCIA é a seguinte:

3.3 Sequências de Números Fuzzy

Nesta parte será apresentada o conceito de sequência de números fuzzy e analisada a sua convergência.

Definição 3.5. *(Maqui [6]) Uma sequência em $\mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ é uma aplicação $A : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}_I(\mathbb{R})$. Denotada por:*

$$(A_n); \quad (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{ou} \quad (A_0, A_1, A_2, ...)$$

Essas sequências serão chamadas de *Sequências de Números Fuzzy*, e a seguir, definir-se-á convergência das mesmas.

Definição 3.6. *Uma sequência de números fuzzy $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se sua correspondente sequência de α-níveis o é; isto é,*

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \to A \in \mathcal{F}_I(\mathbb{R}) \quad \textit{se, e somente se} \quad ([A_n]^\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \to [A]^\alpha \in \mathbb{I}$$

Proposição 3.2. *(Maqui [6]) Sejam (A_n) e (B_n) sequências em $\mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ tais que $A_n \to A$, $B_n \to B$, $A, B \in \mathcal{F}_I(\mathbb{R})$. Então tem-se*

a) $A_n \pm B_n \longrightarrow A \pm B$;

b) $A_n \cdot B_n \longrightarrow A \cdot B$;

c) $\dfrac{A_n}{B_n} \longrightarrow \dfrac{A}{B}$, *para todo* B_n *e* $B \not\supset 0$.

Exemplo 3.3. *Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números fuzzy, tal que, sua sequência de α-níveis é $([A_n]^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ e*

$$[A_n]^\alpha = \left[-1 - e^{-n} + (1 + e^{-n})\alpha, 1 + e^{-n} - (1 + e^{-n})\alpha\right].$$

Assim, $([A_n]^\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \to [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$.

Exemplo 3.4. *Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números fuzzy, tal que, a sequência de α-níveis é $([A_n]^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ e $[A_n]^\alpha = \left[\frac{sen\ n}{n} - 1 + a\alpha, 1 + e^{-n} - a\alpha\right]$ onde $a = 1 + \frac{1}{2}e^{-n} - \frac{1}{2}\frac{sen\ n}{n}$. É fácil ver que $([A_n]^\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \to [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$.*

4 Conclusões

Neste trabalho foram apresentados alguns resultados sobre o Cálculo Intervalar e algumas aplicações no contexto fuzzy, mostrando assim uma forte relação entre estas. O presente estudo é de fundamental importância para o desenvolvimento do cálculo intervalar, das equações diferenciais intervalares e outras via SLCIA. Assim como, cálculo fuzzy, equações diferenciais fuzzy entre outras.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES e FAPESP pelo apoio.

Referências

[1] L. C. Barros e R. C. Bassanezi, Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática, Unicamp-Imecc, (2006).

[2] L. C Barros, R. C. Bassanezi, and P. A. Tonelli. "On the continuity of the Zadeh's extension."Proceedings of the IFSA. Vol. 97. (1997).

[3] Y. Chalco-Cano, W. A. Lodwick, B. Bede and O. Jenkins, Spline approximation for Zadeh's extensions, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, World Scientific, (2008).

[4] Y. Chalco-Cano, W. A. Lodwick, and B. Bede. "Single level constraint interval arithmetic."Fuzzy Sets and Systems 257, 146-168 (2014).

[5] W. A. Lodwick, Interval and fuzzy analysis: A unified approach, Advances in Imaging and Electron Physics, Elsevier, (2007).

[6] G. G. Maqui Huamán, Introdução à Analise Intervalar em Níveis Simples e Extensão de Zadeh, Dissertação de Mestrado, Unesp-Ibilce, (2014).

[7] R. E. Moore, Interval analysis . Vol. 4. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, (1966).

[8] L. A. Zadeh, Fuzzy sets. Information and control, v. 8, n. 3, p. 338-353, (1965).

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0035