Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Norma do sup para equações de advecção-difusão duplamente não lineares: um caso de decrescimento

Jocemar de Q. Chagas[1]
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG, Ponta Grossa, PR
Patrícia L. Guidolin[2]
Instituto Federal de Ciência, Educação e Tecnologia do Rio Grande do Sul, IFRS, Farroupilha, RS
Paulo R. Zingano[3]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo. Neste trabalho usaremos uma série de desigualdades de energia padrão para implementar um refinado argumento do tipo $L^p - L^q$, visando obter, de uma forma relativamente curta, a derivação da seguinte estimativa fundamental na norma do sup:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)\|u_0\|^{\rho}_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{\sigma}, \quad \forall\ t > 0,$$

onde $\rho = \frac{p(\beta+2)}{n(\alpha+\beta)+p(\beta+2)}$ e $\sigma = \frac{n}{n(\alpha+\beta)+p(\beta+2)}$, para soluções da equação de adveção-difusão duplamente não linear regularizada

$$u_t + div\big(\boldsymbol{f}(x,t,u)\big) = div\big(|u|^{\alpha}|\nabla u|^{\beta}\nabla u\big) + \eta\,\Delta u,$$

quando $\boldsymbol{f}$ atende a determinadas condições, expostas no texto a seguir.

Palavras-chave. Equações Diferenciais Parciais, Equações de Evolução, Equações Parabólicas, Estimativas para a norma do sup, Soluções Globais.

1 Introdução

Consideraremos o problema regularizado

$$\begin{cases} u_t + div\big(\boldsymbol{f}(x,t,u)\big) = div\big(|u|^{\alpha}|\nabla u|^{\beta}\nabla u\big) + \eta\,\Delta u, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(\cdot,0) = u_0\ \in\ L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{1}$$

onde $\eta > 0$ está fixo e $1 \leq p_0 < \infty$ é dado; α e β são constantes, com $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta > 0$; e a função $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ satisfaz $|\boldsymbol{f}(x,t,u)| \leq B(T)|u|^{\kappa+1}$, para $\kappa \geq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$, $\big(B(T) < \infty$ denota a *variação* de $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ em $\mathbb{R}^n$, e controla o tamanho de suas derivadas$\big)$ e a condição de estabilidade

$$\sum_{i=1}^{n} u\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(x,t,u) \geq 0, \tag{2}$$

[1]jocemarchagas@uepg.br
[2]patricia.guidolin@ifrs.edu.br
[3]paulo.zingano@ufrgs.br

e apresentaremos as ideias que permitem obter para suas soluções a seguinte estimativa fundamental na norma do sup:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)\|u_0\|^{\rho}_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\sigma}, \quad \forall\ t>0, \tag{3}$$

bem como estipular os valores de ρ e σ para os quais a estimativa é válida.

A existência de solução suave para o problema regularizado (1) em um determinado intervalo $[0,T_*)$ é garantida pela teoria geral de equações parabólicas $\big($ver, por exemplo, [6]$\big)$. Estimativas do tipo (3) podem também ser obtidas por outros métodos, como desigualdades de Sobolev logarítmicas ou técnicas de *Fourier Splitting* $\big($ver, por exemplo, [3] e [8]$\big)$. As ideias apresentadas neste trabalho podem ser vistas com mais detalhes, por exemplo, em [1], onde estão aplicadas a uma equação um pouco mais simples; em [2] e em [5].

A seguir, enunciaremos os principais resultados a serem percorridos no caminho de se obter (3), além de dar uma breve ideia de cada demonstração.

2 Resultados

O primeiro resultado a ser apresentado diz que a norma L^q das soluções suaves $u(\cdot,t)$ decresce, à medida que t cresce.

Teorema 2.1. *Seja* $u(\cdot,t) \in L^\infty\big([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^n)\big)$ *solução suave do problema (1), para algum* $0<T<T_*$, *onde* $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ *satisfaz a condição (2). Então, para cada* $p_0 \leq q \leq \infty$, *vale*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\ 0<t\leq T.$$

Ideia da prova: Consideramos $p_0 \leq q < \infty$ e, para $\delta>0$, $R>0$ e $0<\varepsilon\leq 1$ dados, multiplicamos a equação em (1) por $\Phi'_\delta(u).\zeta_R(x)$, onde $\Phi_\delta(u)$ é a função auxiliar definida por $\Phi_\delta(u) := u^2$, se $q=2$; ou $\Phi_\delta(u) := \big(L_\delta(u)\big)^q$, se $q>2$, onde $L_\delta(u) := \int_0^u S\big(\frac{v}{\delta}\big)dv$ e $S(v)$ é tal que $S'(v)\geq 0\ \forall v$, $S(0)=0$ e $S(v)=sgn(v), |v|\geq 1$; e $\zeta_R(x)$ é a função de corte definida por $\zeta_R(x) := e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} - e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}$, se $|x|\leq R$; ou $\zeta_R(x):=0$, se $|x|>R$.

Após integrar a equação resultante

$$\begin{aligned}\Phi'_\delta(u)\,u_t\,\zeta_R(x) + \Phi'_\delta(u)\,div\big(\boldsymbol{f}(x,t,u)\big)\,\zeta_R(x) &= \\ = \Phi'_\delta(u)\,\mu(t)\,div\big(|u|^\alpha|\nabla u|^\beta\nabla u\big)\,\zeta_R(x) &+ \Phi'_\delta(u)\,\eta\,\Delta u\,\zeta_R(x)\end{aligned}$$

sobre $\mathbb{R}^n\times[t_0,t]$, com $0<t_0<t\leq T$, rearranjar adequadamente os termos, e efetuar as passagens ao limite com $\delta\to 0$ e $R\to\infty$, chegamos a

$$U_\varepsilon(t) \leq U_\varepsilon(0) + \varepsilon\,C_1(T)\int_0^t U_\varepsilon(\tau)\,d\tau + \varepsilon\,C_2(T)\int_0^t \mu(\tau)\,U_\varepsilon(\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

onde $U_\varepsilon(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q\,e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\,dx$, para $q\geq 2$, e $C_1(T), C_2(T)$ são constantes dependentes apenas de n, η, $B(T)$ e $M(T)$, com $M(T) \geq \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\ \forall\ 0\leq t\leq T$.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Ao aplicar o Lema de Gronwall a (4) e passar ao limite com $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\ 0 \leq t \leq T,$$

para q satisfazendo a $q \geq 2$ e $p_0 \leq q < \infty$.

Então, simplesmente fazendo $q \to \infty$, concluímos que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\ 0 \leq t \leq T.$$

A demonstração para o caso $1 < q < 2$ segue os mesmos procedimentos, porém deve-se efetuar a passagem ao limite com $\delta \to 0$ por último. $\square$

A desigualdade indicada no Lema 2.1 será utilizada adiante para derivar estimativas de controle para a solução.

Lema 2.1. *Seja $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}\big([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n)\big)$ solução suave do problema (1). Se $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ satisfaz a condição (2), então, $\forall\ 0 < t_0 < t$ e $\gamma > 0$, podemos obter a seguinte desigualdade:*

$$(t-t_0)^\gamma \big\|u(\cdot,t)\big\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q\,(q-1)\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \big|u(x,\tau)\big|^{q-2+\alpha}\, |\nabla u(x,\tau)|^{\beta+2}\, dx\, d\tau \leq$$
$$\leq \gamma \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{\gamma-1} \big\|u(\cdot,\tau)\big\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\, d\tau. \tag{5}$$

Ideia da prova: O Lema 2.1 tem demonstração similar ao Teorema 2.1, mas no início multiplicamos a equação em (1) por $(t-t_0)^\gamma.\Phi'_\delta(u).\zeta_R(x)$, onde o expoente γ deve ser adequadamente escolhido mais tarde. $\square$

O próximo resultado indica que a norma L^q da solução, em um intervalo de tempo, pode ser controlada por uma norma mais baixa, computada na extremidade esquerda do intervalo.

Teorema 2.2. *Seja $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}\big([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n)\big)$ solução suave do problema (1). Se $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ satisfaz a condição (2), então podemos obter:*

$$\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K_q(n,\alpha,\beta)\big\|u(\cdot,t_0)\big\|^\rho_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{-\sigma}, \tag{6}$$

onde $\rho = \frac{q(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}{q(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}$ e $\sigma = \frac{n}{q(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}$, para qualquer $t_0 < t$ e $2p_0 \leq q < \infty$.

Ideia da prova: Começamos definindo $w(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$w(x,t) := \big|u(x,t)\big|^{\lambda_1}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n, \forall\ t > 0,$$

onde $\lambda_1 \geq 1$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ é solução do problema (1), com $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ satisfazendo a condição (2). Com o objetivo inicial de reescrever a equação (5) em termos de w, ao analisar o 2º

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0034

termo, somos levados a escolher $\lambda_1 = \frac{q+\alpha+\beta}{(\beta+2)}$. Ao reescrever a equação (5) em termos de w encontramos

$$(t-t_0)^{\gamma}\big\|w(\cdot,t)\big\|^{\lambda}_{L^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} + q\,(q-1)\left(\frac{(\beta+2)}{q+\alpha+\beta}\right)^{(\beta+2)}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\gamma}\mu(\tau)\big\|\nabla w(\cdot,\tau)\big\|^{\beta+2}_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)}\,d\tau \leq$$
$$\leq \gamma\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\gamma-1}\big\|w(\cdot,\tau)\big\|^{\lambda}_{L^{\lambda}(\mathbb{R}^n)}\,d\tau, \tag{7}$$

onde $\lambda = \frac{q(\beta+2)}{q+\alpha+\beta}$ é tomado de forma que $\|u(\cdot,t)\|^{q}_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|w(\cdot,t)\|^{\lambda}_{L^{\lambda}(\mathbb{R}^n)},\ \forall\ t>0$.

A seguir, usamos em (7) a seguinte desigualdade de interpolação do tipo Sobolev-Nirenberg-Gagliardo (SNG):

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|w(\cdot,t)\|^{1-\theta}_{L^s(\mathbb{R}^n)}\,\|\nabla w(\cdot,t)\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\ w\in C^1_0(\mathbb{R}^n), \tag{8}$$

onde $0\leq\theta\leq 1$, e r, s e p satisfazem a $0<s\leq r\leq\infty$, $1\leq p\leq\infty$, e $\frac{1}{r} = \Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\Big)\theta + \frac{(1-\theta)}{s}$. $\big($mais sobre essa desigualdade pode ser encontrado, por exemplo, em [4] ou em [7]$\big)$. Com os valores $r=\lambda$, $s=\frac{\lambda}{2}$ e $p=(\beta+2)$, a desigualdade (8) toma a forma

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|w(\cdot,t)\|^{1-\theta}_{L^{\lambda/2}(\mathbb{R}^n)}\,\|\nabla w(\cdot,t)\|^{\theta}_{L^{\beta+2}(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\theta = \frac{n(q+\alpha+\beta)}{nq+q(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}$.

Após alguns procedimentos, incluindo o uso do Teorema 2.1 e a escolha de γ como $\gamma = \frac{(\beta+2)}{(\beta+2)-\theta\lambda}$, obtemos

$$\big\|w(\cdot,t)\big\|^{\lambda}_{L^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq K_1(q,n,\alpha,\beta)\,\|u(\cdot,t_0)\|^{\frac{q(1-\theta)(\beta+2)}{(\beta+2)-\theta\lambda}}_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}\,(t-t_0)^{1-\gamma}. \tag{9}$$

Ao reescrevermos o lado esquerdo de (9) em termos de u, obtemos a expressão desejada (6), com $K_q(n,\alpha,\beta) = \big(K_1(q,n,\alpha,\beta)\big)^{1/q}$, $\rho = \frac{(1-\theta)(\beta+2)}{(\beta+2)-\theta\lambda}$ e $\sigma = \frac{\gamma-1}{q} = \frac{n}{q(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}$. $\square$

Por fim, e como resultado principal, mostramos que para todo $t>t_0$ a norma L^{∞} da solução é majorada por uma função positiva, que decresce à medida que t aumenta.

Teorema 2.3. *Seja $u(\cdot,t)\in L^{\infty}_{loc}\big([0,\infty),L^{\infty}(\mathbb{R}^n)\big)$ solução suave do problema (1). Se $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ satisfaz a condição (2), então podemos obter:*

$$\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,\alpha,\beta,q)\big\|u(\cdot,t_0)\big\|^{\rho}_{L^q(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{-\sigma}, \tag{10}$$

para qualquer $t_0<t$ e $2p_0\leq q<\infty$, onde $\rho = \frac{q(\beta+2)}{n(\alpha+\beta)+q(\beta+2)}$ e $\sigma = \frac{n}{n(\alpha+\beta)+q(\beta+2)}$.

Quando $t_0=0$, (10) se torna a estimativa desejada (3). Além disso, vale ressaltar que os valores de ρ e σ apresentados no Teorema 2.3 são compatíveis com análise de escalas.

Ideia da prova: Para provar (10), usamos um procedimento iterativo: buscamos estimar $\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}$ num instante t, com $0\leq t_0<t$, em termos de um valor conhecido

$\|u(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, onde $u(\cdot,t)\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para isso, tomamos $m>1$ fixo e estimamos inicialmente $\|u(\cdot,t_m=t)\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}$ em termos de um tempo anterior t_{m-1} na norma $L^{2^{(m-1)}p}$. Depois, estimamos $\|u(\cdot,t_{m-1})\|_{L^{2^{(m-1)}p}(\mathbb{R}^n)}$ em termos de um tempo anterior t_{m-2} na norma $L^{2^{(m-2)}p}$, e assim sucessivamente, até chegar ao instante de tempo inicial t_0. Ao proceder dessa maneira conseguimos estimar $\|u(\cdot,t)\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}$ em termos do valor conhecido $\|u(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, e então podemos obter o resultado desejado ao fazer $m\to\infty$.

Para $m>1$ fixo, particionamos o intervalo de tempo (t_0,t) em partes disjuntas e sequenciais, fazendo:

$$\begin{cases} t_0^{(m)} = t_0 + 2^{-m}(t-t_0); \\ t_i^{(m)} = t_0^{(m)} + (1-2^{-i})(t-t_0), \quad \forall\ 1\le i\le m-1; \qquad \text{e} \\ t_m^{(m)} = t_0^{(m)} + (1-2^{-m})(t-t_0) = t. \end{cases}$$

Cosidere inicialmente $q=2^m(p)$. Pelo Teorema 2.2, para qualquer $t_0<t$ e $2p\le q<\infty$, é válida a estimativa

$$\left\|u(\cdot,t)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le K_q(n,\alpha,\beta)\left\|u(\cdot,t_0)\right\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}{q(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}}(t-t_0)^{\frac{-n}{q(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}}. \tag{11}$$

Usando (11) para estimar $\|u(\cdot,t_m^{(m)})\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}$ em termos de $\|u(\cdot,t_{m-1}^{(m)})\|_{L^{2^{(m-1)}p}(\mathbb{R}^n)}$, obtemos

$$\left\|u(\cdot,t_m^{(m)})\right\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)} \le K_m\left\|u(\cdot,t_{m-1}^{(m)})\right\|_{L^{2^{(m-1)}p}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{2^m p(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}{2^m p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}\right)}\left(t_m^{(m)}-t_{m-1}^{(m)}\right)^{\left(\frac{-n}{2^m p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}\right)}.$$

A seguir usamos (11) para estimar $\|u(\cdot,t_{m-1}^{(m)})\|_{L^{2^{(m-1)}p}(\mathbb{R}^n)}$ em termos de $t_{m-2}^{(m)}$.

Repetindo esse procedimento para cada $1\le i\le m$, chegamos a

$$\left\|u(\cdot,t_m^{(m)})\right\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)} \le \prod_{i=1}^{m}\left(K_i^{A_{m-i}}.\|u(\cdot,t_0^{(m)})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{B_m}.\left(2^{-i}(t-t_0)\right)^{\left(\frac{-n}{2^i p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}.A_{m-i}\right)}\right), \tag{12}$$

onde $A_0:=1$; $\forall\ 1\le i\le m-1$ tem-se $A_i:=\prod_{j=0}^{i-1}\left(\frac{2^{m-j}p(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}{2^{m-j}p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}\right)$; e, $\forall\ 1\le i\le m$, $B_i:=\prod_{j=m+1-i}^{m}\left(\frac{2^j p(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}{2^j p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}\right)$.

O próximo procedimento é analisar o comportamento de cada um dos fatores que compõem o lado direito de (12), quando $m\to\infty$.

Analisando $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}\left(2^{-i}(t-t_0)\right)^{\left(\frac{-n}{2^i p(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}.A_{m-i}\right)}$ ao $m\to\infty$, descobrimos que a potência de $(t-t_0)$ se torna $\frac{n}{p(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}$, ou seja, σ, e que a constante é finita.

Ao efetuar a passagem ao limite com $m\to\infty$ no expoente B_m que aparece em (12), descobrimos que $\lim_{m\to\infty}B_m=\frac{p(\beta+2)}{p(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}$, que é o valor esperado para ρ.

Finaliza-se a demonstração mostrando, com algum trabalho, que ao fazer $m\to\infty$ o produtório $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}K_i^{A_{m-i}}$ que aparece em (12) é finito. $\square$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0034

3 Conclusões

Sobre as soluções do problema (1), onde $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ satisfaz a condição (2), apresentamos no Teorema 2.1 um resultado de decrescimento da norma L^q da solução $u(\cdot,t)$, para cada $p_0 \leq q \leq \infty$ e $\forall\ 0 < t \leq T < T_*$. Como consequência direta daquele resultado, podemos concluir que a solução é global (ou seja, é definida para todo $t > 0$). A estimativa de decrescimento (3), nosso principal resultado, é obtida no Teorema 2.3. Como resultado final, como a solução é definida para qualquer $t > 0$, podemos concluir, usando os Teoremas 2.1 e 2.3, que a solução vai a zero ao $t \to \infty$.

Referências

[1] P. Braz e Silva, L. Schütz and P. R. Zingano. On some energy inequalities and supnorm estimates for advection-diffusion equations in $\mathbb{R}^n$, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 93, 90-96, 2013. DOI: 10.1016/j.na.2013.07.028

[2] J. Q. Chagas. Contribuições para a teoria de equações parabólicas duplamente não lineares com termos advectivos. Tese de Doutorado, UFRGS, 2015.

[3] M. Escobedo and E. Zuazua. Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbb{R}^n$, *J. Funct. Anal.*, 100, p. 119-161, 1991.

[4] A. Friedman. *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[5] P. L. Guidolin. Contribuições para a teoria de equações do p-Laplaciano evolutivo com termos advectivos. Tese de Doutorado, UFRGS, 2015.

[6] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Uralceva. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, 1968.

[7] L. Nirenberg. On elliptic partial differential equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, Classe di Scienze 3ª série, tome 13, nº 2, p. 115-162, 1959.

[8] M. M. Porzio. On decay estimates, *J. Evol. Eqs.*, 9, p. 561-591, 2009.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0034