Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Existência de solução para a equação de agregação com dado inicial em espaços de Morrey

Marta L. Suleiman[1]
Departamento de Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, SP
Juliana C. Precioso[2]
Departamento de Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, SP
Andrea C. Prokopczyk[3]
Departamento de Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, SP

Resumo. Neste trabalho vamos considerar uma classe de equações não-lineares de transporte de fluído viscoso, que descreve fenômenos de agregação em biologia. Mostramos a existência de solução global no tempo, com dado inicial em espaços Morrey.

Palavras-chave. Equações Não-Lineares de Transporte de Fluído Viscoso, Quimiotaxia, Espaços de Morrey.

1 Introdução

Vamos considerar o problema de Cauchy da equação do calor, não-local e não-linear, dado por

$$u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u(\nabla K * u)),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Este modelo tem sido usado para descrever fenômenos de quimiotaxia e de mecânica dos meios contínuos.

A equação (1) é chamada de equação de agregação e recebe tal nome devido a função $v(x,t) = K(x) * u(x,t)$ representar o fator de agregação, isto é, a atração ou a repulsa de partículas na posição x e no tempo t. A função incógnita $u = u(x,t) \geq 0$ representa a densidade populacional na posição x, no tempo t e $K = K(x)$ é uma função conhecida. Sugerimos ao leitor consultar [1, 2, 5, 6, 9, 10] no caso de (1) e suas generalizações, consideradas tanto no espaço todo ou em um domínio limitado.

Um dos primeiros modelos da quimiotaxia é modelo de Keller-Segel, cuja forma simplificada é dada por

$$u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \tag{3}$$

$$0 = \Delta v - \alpha v + u, \tag{4}$$

[1]mls_suleiman@hotmail.com
[2]precioso@ibilce.unesp.br
[3]andreacp@ibilce.unesp.br

 © 2017 SBMAC

onde $\alpha > 0$ é uma constante dada.

Destacamos que o modelo (1)-(2) é uma generalização de (3)-(4), pois para escrever (4), devemos tomar $K(x) = e^{-\frac{|x|}{2}\alpha}$, que é a solução fundamental do operador $-\Delta + \alpha Id$, com $v = K * u$. Substituindo esta última fórmula em (3) obtemos (1).
Remetemos o leitor às obras [3, 4, 8], e as referências nelas contidas, para resultados matemáticos da modelagem de sistemas de quimiotaxia.
Vamos considerar o problema de Cauchy (1)-(2) e mostrar a existência de solução global no tempo, com a condição inicial em espaços de Morrey, no caso em que $n \geq 2$ e que a função K é tal que $\nabla K \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

2 Preliminares

2.1 Espaços de funções e definições

Para $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \lambda < n$, o espaço de Morrey $\mathcal{M}_{p,\lambda} = \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ é definido como

$$\mathcal{M}_{p,\lambda} = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{p,\lambda} < \infty\} \tag{5}$$

onde

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n,\ R>0} \{R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B_R(x_0))}\} \tag{6}$$

e $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ é a bola fechada com centro x_0 e raio R. O espaço $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ munido da norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$, é um espaço de Banach . Em particular, $\mathcal{M}_{p,0} = L^p$ para $p \geq 1$. Colocando $p = \infty$ ou $\lambda = n$ na notação $\mathcal{M}_{p,\lambda}$, obtemos o espaço

$$L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \|f\|_\infty < \infty \ q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^n\}.$$

Temos a seguinte relação de escala para $\|\cdot\|_{p,\lambda}$

$$\|f(\alpha x)\|_{p,\lambda} = \alpha^{-\frac{n-\lambda}{p}} \|f(x)\|_{p,\lambda}, \text{ para todo } \alpha > 0. \tag{7}$$

A desigualdade de Hölder em espaços de Morrey é dada como segue: se $1 \leq p_i \leq \infty$ e $0 \leq \lambda_i < n$, com $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e $\frac{\lambda_3}{p_3} = \frac{\lambda_2}{p_2} + \frac{\lambda_1}{p_1}$, então

$$\|fg\|_{p_3,\lambda_3} \leq \|f\|_{p_1,\lambda_1} \|g\|_{p_2,\lambda_2}. \tag{8}$$

Também a desigualdade de Young é válida em espaços de Morrey: se $1 \leq p \leq \infty$ e $0 \leq \lambda < n$, então

$$\|g * f\|_{p,\lambda} \leq \|g\|_1 \|f\|_{p,\lambda}. \tag{9}$$

As demonstrações das desigualdades acima podem ser vistas em [7].
Observamos que $\|\cdot\|_1$ denota $\|\cdot\|_{L^1}$.

 © 2017 SBMAC

2.2 Solução Mild

A linearização de (1)−(2) é o problema linear de Cauchy para a equação do calor

$$u_t - \Delta u = 0, \; x \in \mathbb{R}^n, \; t > 0 \tag{10}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \; x \in \mathbb{R}^n, \tag{11}$$

cuja solução é dada por

$$u(t) = G(t)u_0.$$

O operador $G(t)$ é o operador de convolução, com kernel $g(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

Aplicando o princípio de Duhamel, o problema (1)−(2) é equivalente ao sistema integral

$$u(t) = G(t)u_0 + B(u,u)(t), \tag{12}$$

em que

$$B(u,v)(t) = -\int_0^t \nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * v))(s)ds. \tag{13}$$

As soluções de (12) são chamadas de soluções mild para (1)−(2).

3 Resultados

Para obtermos solução global para a formulação integral (12), precisamos considerar espaços funcionais com índices adequados de modo que suas normas sejam invariantes pela aplicação escala, isto é, pela aplicação

$$u \longrightarrow u_\alpha \tag{14}$$

onde

$$u_\alpha(x,t) := \alpha u(\alpha x, \alpha^2 t), \text{ para todo } \alpha > 0, \tag{15}$$

tal que, u_α é solução de (1)−(2) sempre que u o for.

Uma conta simples, mostra que, fazendo $t \to 0^+$ em (15), obtemos a aplicação escala para a condição inicial

$$u_0(x) \longrightarrow \alpha u_0(\alpha x). \tag{16}$$

Definimos a seguir espaços funcionais que iremos considerar daqui por diante, chamados de espaços críticos. A notação $BC((0,\infty),X)$ representa o conjunto das funções contínuas e limitadas no intervalo $(0,\infty)$ para um espaço de Banach X.

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $0 \leq \lambda < n-1$, $1 < p < q < \infty$. Para $u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definimos

$$E_q = \{u : t^\eta u \in BC((0,\infty), \mathcal{M}_{q,\lambda})\}, \text{ onde } \eta = \tfrac{1}{2} - \tfrac{n-\lambda}{2q},$$

e

 © 2017 SBMAC

$$E_p = \{u : t^{\beta} u \in BC((0,\infty), \mathcal{M}_{p,\lambda})\}, \text{ tais que } \beta = 0 \text{ e } p = n - \lambda.$$

Os conjuntos acima definidos, dotados das respectivas normas

$$\|u\|_{E_q} = \sup_{t>0} t^{\eta} \|u(\cdot,t)\|_{q,\lambda} \tag{17}$$

e

$$\|u\|_{E_p} = \sup_{t>0} \|u(\cdot,t)\|_{p,\lambda}. \tag{18}$$

são espaços de Banach.
Os parâmetros η, β e p foram encontrados de modo que as normas $\|\cdot\|_{E_q}$ e $\|\cdot\|_{E_p}$ sejam invariantes por (14) e tal que $u_0 \in \mathcal{M}_{p,\lambda}$ seja invariante por (16). A solução global no tempo, invariante por escala, será procurada no espaço

$$E = E_q \cap E_p \tag{19}$$

que é também um espaço de Banach, quando munido da norma

$$\|u\|_E = \|u\|_{E_q} + \|u\|_{E_p}. \tag{20}$$

Theorem 3.1. *Assuma que $n \geq 2$, $0 \leq \lambda < n-1$, $1 < \frac{q}{2}$, $1 < p < q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ e $\eta = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}$. Suponha que $u_0 \in \mathcal{M}_{p,\lambda}$. Existem $\varepsilon > 0$ e $M > 0$ tais que, se $\|u_0\|_{p,\lambda} \leq \varepsilon$, então existe uma única solução global mild $u \in E$ para (1)-(2), satisfazendo $\|u\|_E \leq 2\varepsilon C_3$, onde $C_3 > 0$.*

4 Prova dos resultados

Vamos enunciar o lema abstrato do ponto fixo que será usado para provar nosso resultado.

Lemma 4.1. *Sejam X um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_X$ e $B : X \times X \to X$ uma aplicação bilinear contínua, isto é, existe $N > 0$ tal que*

$$\|B(x_1,x_2)\|_X \leq N \|x_1\|_X \|x_2\|_X, \text{ para todo } x_1,\ x_2 \in X. \tag{21}$$

Seja $y \in X$, $y \neq 0$ e $\|y\|_X \leq \varepsilon$. Se $0 < \varepsilon < \frac{1}{4N}$, então existe uma única solução $x \in X$ para a equação $x = y + B(x,x)$, tal que $\|x\|_X \leq 2\varepsilon$.

4.1 Estimativas para $G(t)$ e $\nabla_x G(t)$ em espaços de Morrey

O lema a seguir fornece estimativas para $G(t)$ e $\nabla_x G(t)$ em espaços de Morrey, cuja demonstração pode ser encontrada em [7].

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0025 © 2017 SBMAC

Lemma 4.2. *Sejam* $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ *e* $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < n$. *Se* $n \geq \frac{n-\lambda_1}{p_1} \geq \frac{n-\lambda_2}{p_2} \geq 0$, *então existe uma constante* $C = C(p_1, p_2, \lambda_1, \lambda_2) > 0$, *tal que*

$$\|G(t)f\|_{p_2,\lambda_2} \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda_1}{p_1} - \frac{n-\lambda_2}{p_2}\right)} \|f\|_{p_1,\lambda_1}, \tag{22}$$

e

$$\|\nabla_x G(t)f\|_{p_2\lambda_2} \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{n-\lambda_1}{p_1} - \frac{n-\lambda_2}{p_2}\right)} \|f\|_{p_1,\lambda_1}, \tag{23}$$

para toda $f \in \mathcal{M}_{p_1,\lambda_1}$.

4.2 Estimativas bilineares

Vamos agora estimar o operador bilinear definido em (12).

Lemma 4.3. *Considerando as hipóteses do Teorema* 3.1, *existem constantes* $M_1, M_2 > 0$ *tais que*

$$\|B(u,v)\|_{E_p} \leq M_1 \|\nabla K\|_1 \|u\|_{E_q} \|v\|_{E_p} \tag{24}$$

e

$$\|B(u,v)\|_{E_q} \leq M_2 \|\nabla K\|_1 \|u\|_{E_q} \|v\|_{E_q}, \tag{25}$$

para todo $u, v \in E$.

Demonstração. Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, pelo Lema 4.2, temos

$$\begin{aligned} \|B(u,v)\|_{p,\lambda} &\leq \int_0^t \|\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * v))(s)\|_{p,\lambda}\, ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2r} + \frac{n-\lambda}{2p}} \|(u(\nabla K * v))(s)\|_{r,\lambda}\, ds. \end{aligned} \tag{26}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder (8) e em seguida a desigualdade de Young (9), segue que

$$\begin{aligned} \|(u(\nabla K * v))(s)\|_{r,\lambda} &\leq \|u(s)\|_{q,\lambda}\ \|(\nabla K * v)(s)\|_{p,\lambda} \\ &\leq \|u(s)\|_{q,\lambda}\ \|\nabla K\|_1\ \|v(s)\|_{p,\lambda}. \end{aligned} \tag{27}$$

Substituindo (27) em (26) e usando que $\frac{n-\lambda}{2p} + \frac{n-\lambda}{2q} = \frac{n-\lambda}{2r}$, temos

$$\begin{aligned} \|B(u,v)\|_{p,\lambda} &\leq C\ \|\nabla K\|_1 \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}} \|u(s)\|_{q,\lambda}\ \|v(s)\|_{p,\lambda}\, ds \\ &\leq C\ \|\nabla K\|_1\ \sup_{t>0} t^{\eta} \|u(t)\|_{q,\lambda}\ \sup_{t>0} \|v(t)\|_{p,\lambda} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}} s^{-\eta} ds \\ &= C\ \|\nabla K\|_1\ \|u\|_{E_q}\ \|v\|_{E_p} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}} s^{-\frac{1}{2} + \frac{n-\lambda}{2q}} ds \\ &= M_1\ \|\nabla K\|_1\ \|u\|_{E_q}\ \|v\|_{E_p}. \end{aligned} \tag{28}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0025 © 2017 SBMAC

Tomando o $\sup_{t>0}$ em (28), obtemos (24).

A estimativa (25) segue imediatamente do Lema 4.2 e das desigualdades (8) e (9)

$$\begin{aligned}
t^{\eta}\|B(u,v)\|_{q,\lambda} &\leq t^{\eta}\int_0^t \|\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * v))(s)\|_{q,\lambda} ds \\
&\leq Ct^{\eta}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2\frac{q}{2}}+\frac{n-\lambda}{2q}} \|(u(\nabla K * v))(s)\|_{\frac{q}{2},\lambda}\, ds \\
&\leq Ct^{\eta}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|u(s)\|_{q,\lambda}\, \|(\nabla K * v)(s)\|_{q,\lambda}\, ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\|\nabla K\|_1 t^{\eta}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|u(s)\|_{q,\lambda}\, \|v(s)\|_{q,\lambda}\, ds \\
&\leq C\|\nabla K\|_1 t^{\eta} \sup_{t>0} t^{\eta}\|u(t)\|_{q,\lambda} \sup_{t>0} t^{\eta}\|v(t)\|_{q,\lambda} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} s^{-2\eta} ds \\
&= C\|\nabla K\|_1 \|u\|_{E_q}\|v\|_{E_q} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} s^{-1+\frac{n-\lambda}{q}} ds \\
&= M_2\|\nabla K\|_1\|u\|_{E_q}\|v\|_{E_q}. \qquad (29)
\end{aligned}$$

Tomando o $\sup_{t>0}$ em (29), obtemos (25). □

4.3 Prova do Teorema 3.1

Tome $X = E$ definido em (19). Denotemos $M = \max\{M_1, M_2\}$, $y = G(t)u_0$. Para $u, v \in E$, recordando (20), do Lema 4.3 segue que

$$\begin{aligned}
\|B(u,v)\|_E &\leq M\|\nabla K\|_1\|u\|_E(\|v\|_{E_p} + \|v\|_{E_q}) \\
&= M\|\nabla K\|_1\|u\|_E\|v\|_E \qquad (30)
\end{aligned}$$

ou seja, a aplicação é bilinear contínua.

Por outro lado, pela hipótese de pequenez do dado inicial, aplicando o Lema 4.2 e relembrando que $n - \lambda = p$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|y\|_E &= \sup_{t>0}\|G(t)u_0\|_{p,\lambda} + \sup_{t>0} t^{\eta}\|G(t)u_0\|_{q,\lambda} \\
&\leq C_1\|u_0\|_{p,\lambda} + C_2 \sup_{t>0} t^{\eta} t^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p}-\frac{n-\lambda}{q})}\|u_0\|_{p,\lambda} \\
&\leq C_3\|u_0\|_{p,\lambda} \leq \varepsilon C_3
\end{aligned}$$

Portanto, se $0 < \varepsilon < \frac{1}{4M\|\nabla K\|_1 C_3}$, então pelo Lema 4.1 implica que existe uma única solução $u \in E$ de (12) tal que $\|u\|_E \leq 2\varepsilon C_3$.

Referências

[1] P. Biler, G. Karch, Blowup of solutions to generalized Keller-Segel model, *J. Evol. Equ.*, 10:247–262, 2010. DOI:10.1007/s00028-009-0048-0.

[2] P. Biler, G. Karch and P. Laurençot, Blowup of solutions to a diffusive aggregation model, *Nonlinearity* 22:1559–1568, 2009.

[3] A. Blanchet, J. Dolbeault, M. Escobedo and J. Fernández, Asymptotic behaviour for small mass in the two-dimensional parabolic-elliptic Keller-Segel model. *J. Math. Anal. Appl.* 361:533–542, 2010. DOI:10.1016/j.jmaa.2009.07.034.

[4] A. Blanchet, J. Dolbeault, B. Perthame, Two dimensional Keller-Segel model: Optimal critical mass and qualitative properties of the solutions, *Electron. J. Diff. Eqns.* 44:1–33, 2006.

[5] G. Karch and K. Suzuki, Blow-up versus global existence of solutions to aggregation equation, *Applicationes Mathematicae*, 38, 3:243–258, 2011.

[6] G. Karch and K. Suzuki, Spikes and diffusion waves in one-dimensional model of chemotaxis, *Nonlinearity* 23:3119–3137, 2010. DOI:10.1088/0951-7715/23/12/007.

[7] T. Kato, Strong solutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces, *Bol. Sol. Bras. Mat.*, 22, 2:127–155, 1992. DOI:10.1007/BF01232939.

[8] H. Kozono and Y. Sugiyama, Local existence and finite time blow-up of solutions in the 2-D Keller- Segel system, *J. Evol. Equ.* 8:353–378, 2008. DOI:10.1007/s00028-008-0375-6.

[9] D. Li and X. Zhang, On a nonlocal aggregation model with nonlinear diffusion, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 27:301–323, 2010.

[10] C. M. Topaz, A. L. Bertozzi and M. A. Lewis, A nonlocal continuum model for biological aggregation, *Bull. Math. Biol.* 68:1601–1623, 2006. DOI:10.1007/s11538-006-9088-6.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0025 © 2017 SBMAC