Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Resultados Qualitativos e Quantitativos para Soluções de Equações Dinâmicas em Escalas de Tempo

Edilaine dos Santos Duran[1]
Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia, UNESP, SP
Iguer Luiz Domini dos Santos[2]
Departamento de Matemática, UNESP, SP

1 Introdução

Tradicionalmente pesquisadores assumem que os processos dinâmicos são divididos em contínuos e discretos, sendo necessário a aplicação de equações diferenciais e equações de diferença separadamente.

No entanto em algumas situações não é possível fazer essa distinção, como por exemplo na natureza, o ciclo de vida de uma cigarra (dependendo da espécie), que passa de 4 a 17 anos no subterrâneo durante seu crescimento, e ao chegar em sua fase adulta sai acima do solo por apenas algumas semanas antes de morrer. Neste exemplo não podemos considerar apenas um processo dinâmico somente continuo ou somente discreto, já que esse inseto vive diferentes períodos "abaixo"e "acima"do solo, portanto dificilmente os resultados estarão livres de grandes erros. Mais exemplos podem ser encontrados em [4].

Com o propósito de unificar o cálculo diferencial e o cálculo das diferenças, em 1990 o matemático alemão Stefan Hilger introduziu através de [2] o cálculo em escalas de tempo, levando a aplicações em diversos campos que requerem a modelagem simultânea de dados discretos e contínuos.

2 Objetivos e Resultados

Neste trabalho, estudamos alguns resultados considerados em [4] sobre a existência e unicidade de soluções para equações dinâmicas de primeira ordem em escalas de tempo. Uma escala de tempo $\mathbb{T}$ é um subconjunto não-vazio e fechado de números reais. Alguns exemplos de escalas de tempo são $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ e $h\mathbb{Z}$. Propriedades do cálculo em escalas de tempo podem ser encontradas em [1].

Abaixo enunciamos os principais resultados utilizados para a realização deste trabalho.

[1] edilaineduran@gmail.com
[2] iguerluis@mat.feis.unesp.br

Theorem 2.1 (Banach, [4])**.** *Sejam* (Y, d) *um espaço métrico completo e* $F : Y \longrightarrow Y$ *uma contração. Então* F *tem um único ponto fixo* u *e* $F^i(y) \longrightarrow u$ *para todo* $y \in Y$*, onde* $F^0(y) = y$ *e* $F^{i+1}(y) = F(F^i(y))$*.*

Theorem 2.2 (Schäfer, [4])**.** *Seja* X *um espaço normado com* $H : X \longrightarrow X$ *compacta. Se o conjunto*

$$S := \{u \in X : u = \lambda H u \text{ para algum } \lambda \in X[0,1)\}$$

é limitado então H *tem pelo menos um ponto fixo.*

Theorem 2.3 (Arzela-Ascoli, [3])**.** *Considere um conjunto* $\mathbb{K}$ *compacto e uma coleção* E *de funções* $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}^m$*. Suponha que* E *é equicontínuo e limitado na norma do supremo. Então toda sequência de* E *possui uma subsequência que converge uniformemente em* $\mathbb{K}$*.*

Tais ferramentas foram utilizadas em [4] para estabelecer a existência de soluções para as equações

$$x^{\Delta} = f(t, x), t \in [a, b]_{\mathbb{T}} := [a, b] \cap \mathbb{T} \tag{1}$$

$$x^{\Delta} = f(t, x^{\sigma}), t \in [a, b]_{\mathbb{T}} \tag{2}$$

com condição inicial

$$x(a) = A. \tag{3}$$

Os resultados de existência e unicidade de soluções para as Eqs. (1) e (3) e para as Eqs. (2) e (3), podem ser encontrados, respectivamente, em ([4], Theorem 3.4) e ([4], Theorem 3.7). Tais teoremas são obtidos através do teorema do ponto fixo de Banach.

Já a existência de pelo menos uma solução para as Eqs. (1) e (3) ou para as Eqs. (2) e (3), pode ser encontrada, respectivamente, em ([4], Theorem 4.3) e ([4], Theorem 4.5). Tais resultados são obtidos através dos teoremas de Schäfer e de Arzela-Ascoli.

Referências

[1] M. Bohner and A. Peterson. *Dynamic equations on time scales*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, an introduction with applications, 2001.

[2] S. Hilger. *Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus*. Results in Mathematics, 18(1-2), 18-56, 1990.

[3] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill Book company, New York, 1987.

[4] C. C. Tisdell and A. Zaidi. *Basic qualitative and quantitative results for solutions to nonlinear, dynamic equations on time scales with an application to economic modelling*. Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. Series A: Theory and Methods, 2007. DOI: 10.1016/j.na.2007.03.043.