

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise Espectral de Sinais Caóticos Gerados pelo Mapa de Bernoulli com r Segmentos

Rafael Alves da Costa,¹ Murilo Bellezoni Loiola²

Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas, UFABC, Santo André, SP

Marcio Eisencraft³

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP

Resumo. Nas últimas décadas, diversas aplicações práticas de sinais caóticos em comunicação têm sido consideradas. Para tanto, é de fundamental importância conhecer e controlar as características temporais e espectrais desses sinais. No presente texto, faz-se um estudo analítico da sequência de autocorrelação e da densidade espectral de potência de sinais caóticos em tempo discreto gerados pelo mapa de Bernoulli com r segmentos.

Palavras-chave. Caos, Comunicação com Caos, Análise Espectral, Banda Essencial

1 Introdução

Um sinal caótico é limitado em amplitude, aperiódico, determinístico e apresenta dependência sensível às condições iniciais [1]. Esta última característica implica que duas condições iniciais próximas geram sinais que se tornam distintos depois de algumas iterações [1]. Atualmente existe um grande número de áreas desenvolvendo pesquisas envolvendo sinais caóticos. Em particular, na Engenharia de Telecomunicações vêm surgindo numerosas possibilidades de aplicações em modulações analógica e digital, codificação e criptografia, entre outras áreas [2, 4, 10].

No projeto de sistemas de comunicação é fundamental conhecer a Sequência de Autocorrelação (SAC), a Densidade Espectral de Potência (DEP) e a banda essencial dos sinais envolvidos. Nos últimos anos houve algum progresso na determinação da DEP de sinais caóticos gerados por algumas famílias de mapas [3, 5, 6], porém, resultados mais gerais ainda precisam ser encontrados.

Portanto, neste contexto, o objetivo deste artigo é generalizar resultados obtidos previamente, determinando-se fórmulas fechadas para a DEP de mapas unidimensionais lineares por partes com r inclinações distintas e analisar o caso em que as inclinações são iguais.

O artigo é estruturado da seguinte forma: na Seção 2 define-se o mapa estudado e na Seção 3 deduzem-se a SAC, a DEP e a banda essencial. Na Seção 4, particularizam-se os

¹r.costa@ufabc.edu.br

²murilo.loiola@ufabc.edu.br

³marcio@lcs.poli.usp.br

resultados para o caso em que as inclinações são iguais. Para esse caso em particular, são mostradas simulações que validam os resultados teóricos. Por fim, na Seção 5 tecem-se conclusões.

2 O Mapa de Bernoulli com r segmentos

O mapa de Bernoulli com $r \geq 2$ segmentos $f_B(\cdot)$, é composto por r trechos lineares, com inclinações positivas [1]. As abscissas dos pontos de descontinuidade $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ são os parâmetros que definem o mapa na família.

O mapa $f_B(\cdot)$, definido no intervalo $U = [-1, 1]$ é dado por

$$s(n+1) = f_B(s(n)), \tag{1}$$

em que

$$f_B(s) = \frac{2s - (\alpha_j + \alpha_{j-1})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}, \quad \alpha_{j-1} \leq s < \alpha_j, \tag{2}$$

sendo $\alpha_0 = -1, \alpha_r = 1$ e $\alpha_j \in (-1, 1), j = 1, \dots, r$.

Na Figura 1(a) é mostrado um exemplo de $f_B(\cdot)$ com $r = 7$ e $\alpha_1 = -0.5, \alpha_2 = -0.3, \alpha_3 = -0.1, \alpha_4 = 0.2, \alpha_5 = 0.7$ e $\alpha_6 = 0.8$. Na Figura 1(b) dois trechos de sinal desse mapa com condições iniciais muito próximas, $s(0) = 0.3$ e $s(0) = 0.300000001$ são mostrados. Observa-se que o sinal é aperiódico e apresenta Dependência Sensível às Condições Iniciais (DSCI).

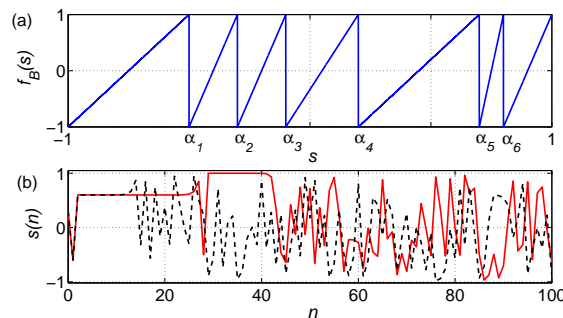


Figura 1: (a) Exemplo de $f_B(\cdot)$ com $r = 7$ (b) trecho de órbitas desse mapa com $s(0) = 0.3$ (linha contínua) e $s(0) = 0.300000001$ (linha tracejada).

A densidade invariante das órbitas de $f_B(\cdot)$ pode ser obtida pela iteração do operador de Frobenius-Perron $\mathcal{P}(\cdot)$ [7] aplicado a uma densidade inicial qualquer $p(s)$. Sendo s_1, s_2, \dots, s_r as contra-imagens de um ponto s , como mostrado na Figura 2,

$$\mathcal{P}(p(s)) = \frac{d}{ds} \int_{f^{-1}([-1,s])} p(u) du = \frac{1}{2} [(\alpha_1 + 1)p(s_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)p(s_2) + \dots + (1 - \alpha_{r-1})p(s_r)]. \tag{3}$$

Note que para $p(s) = \frac{1}{2}$, $\mathcal{P}(p(s)) = \frac{1}{2} [(\alpha_1 + 1)\frac{1}{2} + \dots + (1 - \alpha_{r-1})\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$. Assim, a densidade invariante para o mapa $f_B(\cdot)$ é uniforme e dada por

$$p_*(s) = \frac{1}{2}, \quad \text{para } -1 \leq s \leq 1. \tag{4}$$

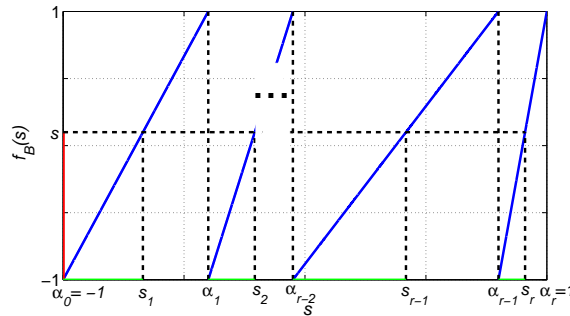


Figura 2: A contra-imagem do intervalo $[-1, s]$ da família de mapas de Bernoulli com r inclinações é dada por $[-1, s_1] \cup [\alpha_1, s_2] \cup \dots \cup [\alpha_{r-2}, s_{r-1}] \cup [\alpha_{r-1}, s_r]$.

O fato da densidade invariante ser uniforme facilita os cálculos da SAC e da DEP, como é discutido nas seções subsequentes.

A potência média das orbitas geradas por $f_B(\cdot)$ é

$$P_m = E[s^2] = \int_{-1}^1 s^2 p_*(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{1}{3}. \tag{5}$$

3 Sequência de Autocorrelação e Densidade Espectral de Potência

Sinais caóticos gerados por mapas podem ser tratados como funções amostras de um processo estocástico ergódico [7]. Para um conjunto fixo de parâmetros, o sinal caótico gerado pelo mapa a partir de uma condição inicial $s(0)$ pode ser interpretado como uma função amostra de um processo estocástico definido por $f_B(\cdot)$. Utilizando-se essa interpretação, deduz-se a seguir a SAC utilizando-se uma técnica similar à empregada em [11].

A SAC $R(k)$ do sinal $s(n)$ para um atraso k é definida por

$$R(k) = E[s(n)s(n+k)]. \tag{6}$$

A esperança matemática $E[\cdot]$ é tomada sobre todas as condições iniciais que geram sinais caóticos. Para facilitar a notação define-se $x = s(n)$ e $y = s(n+k) = f_B^k(x)$.

Assim, a densidade conjunta $p(x, y)$ é dada por $p(x, y) = p_*(x)\delta(y - f_B^k(x))$, em que $p_*(\cdot)$ é dada por (4) e $\delta(\cdot)$ representa a função delta de Dirac. Desta forma, como $U = [-1, 1]$, usando (6) e (4), tem-se para os mapas $f_B(\cdot)$

$$R(k) = E[s(n)s(n+k)] = E[xy] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy p_*(x)\delta(y - f_B^k(x)) dx dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f_B^k(x) dx. \tag{7}$$

A imagem de cada um dos r segmentos que formam o mapa $f_B(\cdot)$ é igual ao domínio U do mapa. Assim, o gráfico $f_B^k(\cdot)$ consiste de r^k segmentos. Na Figura 3(a), tem-se o

mapa $f_B(x)$. Na Figura 3(b) é apresentado o gráfico de $f_B^2(x)$ e na Figura 3(c) é mostrado um trecho do gráfico de $f_B^k(x)$ para um k genérico. Representa-se a m -ésima solução da equação $f_B^k(x) = 1$ por $a_k(m)$, em que $1 \leq m \leq r^{k-1}$.

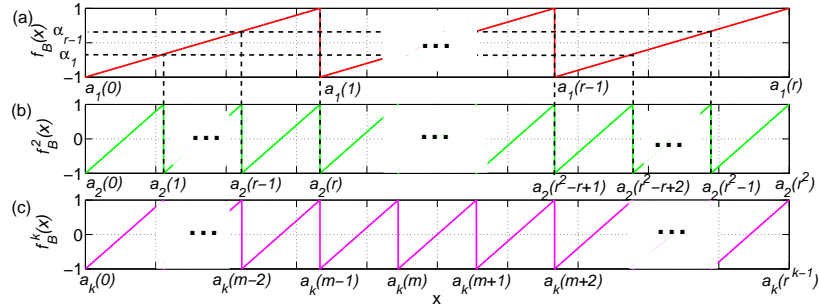


Figura 3: (a) $f_B(x)$, (b) $f_B^2(x)$ e (c) $f_B^k(x)$.

O segmento que passa por $(a_k(m - 1), -1)$ e $(a_k(m), 1)$ pode ser equacionado como

$$y = \frac{2x - (a_k(m) + a_k(m - 1))}{a_k(m) - a_k(m - 1)}. \tag{8}$$

Substituindo-se (8) em (7) obtém-se

$$R(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r^{k-1}} \left[\int_{a_k(m-1)}^{a_k(m)} \left(\frac{2x^2 - (a_k(m) + a_k(m - 1))x}{(a_k(m) - a_k(m - 1))} \right) dx \right]. \tag{9}$$

Resolvendo-se a integral tem-se

$$R(k) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^{k-1}} [(a_k(m) - a_k(m - 1))^2]. \tag{10}$$

Calculando-se $R(k + 1)$ a partir de (10), obtém-se

$$R(k + 1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} [(a_{k+1}(m) - a_{k+1}(m - 1))^2]. \tag{11}$$

Ao iterar uma vez o mapa, passa-se de $f_B^k(x)$ para $f_B^{k+1}(x)$, cuja a generalização pode ser feita a partir das Figuras 4(a) e 4(b), em que $w_{m,1}, w_{m,2}, \dots$ e $w_{m,r-1}$ são as raízes das equações $f_B^k(x) = \alpha_1, f_B^k(x) = \alpha_2, \dots$ e $f_B^k(x) = \alpha_{r-1}$ no intervalo $[a_k(m - 1), a_k(m)]$, respectivamente.

Para determinar $w_{m,1}, w_{m,2}, \dots$ e $w_{m,r-1}$ substitui-se y por $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ e α_{r-1} e x por $w_{m,1}, w_{m,2}, \dots$ e $w_{m,r-1}$ em (8). Desta forma, tem-se

$$w_{m,j} = \frac{(a_k(m) - a_k(m - 1)) \alpha_j + (a_k(m) + a_k(m - 1))}{2}. \tag{12}$$

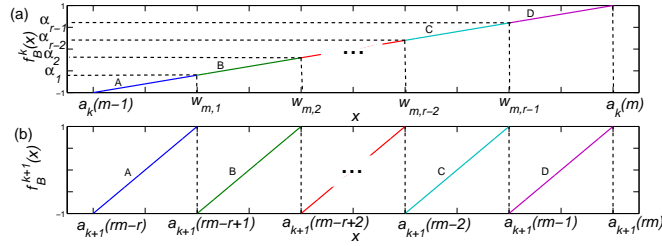


Figura 4: (a) Trecho genérico de $f_B^k(x)$ e (b) trecho desse mapa após uma iteração $f_B^{k+1}(x)$

Relacionando-se os gráficos da Figura 4, observa-se que $a_{k+1}(rm - r) = a_k(m - 1)$, $a_{k+1}(rm - r + 1) = w_{m,1}, \dots = \dots, a_{k+1}(rm) = a_k(m)$.

Pelas relações inferidas da Figura 4 e pela expressão (12) obtêm-se

$$R(k + 1) = \frac{\psi}{12} \sum_{m=1}^{r^{k-1}} \left[(a_k(m) - a_k(m - 1))^2 \right], \quad (13)$$

em que $\psi = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{r-1} (\alpha_j^2 - \alpha_j \alpha_{j+1})$.

Comparando (10) e (13), observa-se que $R(k+1) = \psi R(k)$. Resolvendo-se esta equação a diferenças com a condição inicial dada em (5), obtêm-se

$$R(k) = \frac{1}{3} \psi^{|k|}. \quad (14)$$

A DEP $P(\omega)$ é obtida calculando-se a Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD) de $R(k)$, considerando-se k a variável temporal [9]. Assim, a DEP de $f_B(\cdot)$, é dada por

$$P(\omega) = \frac{1 - \psi^2}{3(1 + \psi^2 - 2\psi \cos(\omega))}. \quad (15)$$

A banda essencial B é definida como o comprimento do intervalo de frequência em que $q = 95\%$ da potência do sinal está concentrada [8]. Calculando-se a banda essencial B utilizando-se o mesmo procedimento utilizado em [5] obtêm-se

$$B = 2 \arctan \left[\tan \left(\frac{q\pi}{2} \right) \left| \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \right| \right]. \quad (16)$$

Na seção seguinte exemplificam-se esses resultados para o caso r inclinações iguais.

4 Caso r inclinações iguais

Nesse caso, os segmentos que separam os parâmetros no domínio U possuem mesmo comprimento. Dessa forma, $\alpha_k = -1 + \frac{2}{r}k$, em que $k = 0, 1, \dots, r$. Nesse caso, $\psi = \frac{1}{r}$. Assim, a SAC é $R(k) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{r} \right)^{|k|}$, a DEP $P(\omega) = \frac{r^2 - 1}{3(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))}$ e a banda essencial $B = 2 \arctan \left[\tan \left(\frac{q\pi}{2} \right) \left| \frac{1-r}{1+r} \right| \right]$.

Na Figura 5(a) é ilustrada a SAC para $f_B(\cdot)$ para alguns valores de r . Observa-se que para $r \geq 2$, $R(k)$ decai monotonicamente com $|k|$. Conforme aumenta-se o valor r , a SAC aproxima-se da forma impulsiva. Para cada curva teórica, é mostrado em tracejado o resultado obtido numericamente utilizando-se 500 funções-amostras com condições iniciais $s(0)$ uniformemente distribuídas no domínio U , cada uma com $N = 1000$ pontos. Claramente, os resultados numéricos validam os resultados teóricos obtidos. Na Figura 5(b) são ilustradas as curvas analíticas da DEP e estimativas da DEP obtida numericamente. Nota-se que com r suficientemente grande a DEP resultante aproxima-se de um espectro plano. Na Figura 6(a) é mostrado o gráfico de B em função de r e na Figura 6(b) em função do expoente de Lyapunov $h_B = \ln(r)$. Nas simulações, utilizou-se $r = 2$ até $r = 50$ com $r \in \mathbb{N}$. Observa-se que conforme aumenta-se r aumenta-se também a distribuição espectral da potência.

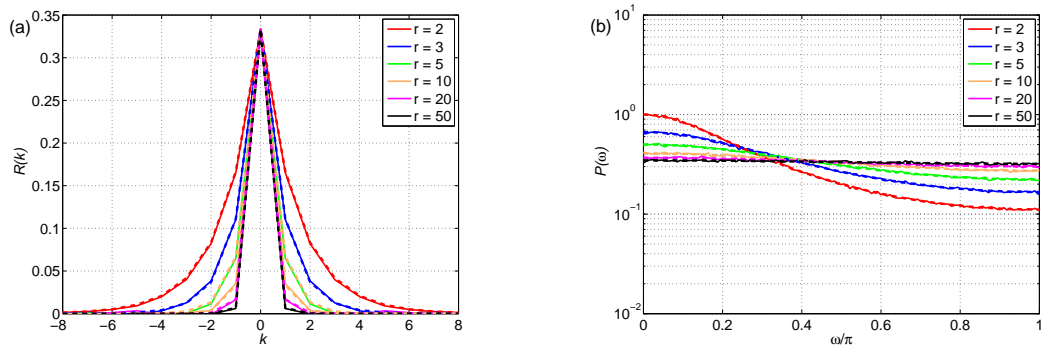


Figura 5: (a) SAC e (b) DEP para sinais do mapa $f_B(\cdot)$ para alguns valores de r . Curvas analíticas (linha tracejada) e curvas numérica (linha contínua).

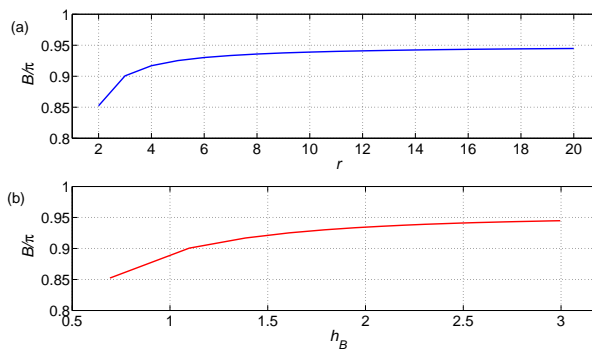


Figura 6: Banda essencial em função de (a) de r e (b) do expoente de Lyapunov.

5 Conclusões

Para aplicações práticas na área de Telecomunicações é fundamental conhecer e controlar as características espectrais dos sinais envolvidos. Nesse artigo, deduziram-se a

SAC, a DEP e a banda essencial para as órbitas do mapa de Bernoulli com r inclinações. Analisou-se o caso r inclinações iguais analítica e numericamente. Esses resultados podem ser úteis no projeto e implementação de sistemas de comunicação baseados em caos que venham a utilizar esses mapas. No momento, os autores estão trabalhando nesse aspecto.

Agradecimentos

ME gostaria de agradecer ao suporte financeiro do CNPq, processos 479901/2013-9 e 311575/2013-7 e da FAPESP, processo 2014/04864-2. MBL gostaria de agradecer ao suporte financeiro da FAPESP processo 2013/25977-7.

Referências

- [1] K. Alligood, T. Sauer, and J. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer, 1997.
- [2] M. Baptista. Cryptography with chaos. *Physics Letters A*, 240:50 – 54, 1998.
- [3] R. A. da Costa, M. B. Loiola, and M. Eisenkraft. Spectral properties of chaotic signals generated by the bernoulli map. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 8(2):12–16, 2015.
- [4] M. Eisenkraft, R. R. F. Attux, and R. Suyama, editors. *Chaotic Signals in Digital Communications*. CRC Press, Inc., 2013.
- [5] M. Eisenkraft, D. M. Kato, and L. H. A. Monteiro. Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map. *Signal Processing*, 90(1):385–390, 2010.
- [6] K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith. Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes. *Signal Processing*, 94(0):149 – 157, 2014.
- [7] A. Lasota and M. MacKey. *Probabilistic properties of deterministic systems*. Cambridge University Press, 1985.
- [8] B. P. Lathi. *Modern Digital and Analog Communication Systems*. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 4.ed edition, 2009.
- [9] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall Press, Upper Saddle River, NJ, USA, 3rd edition, 2009.
- [10] H.-P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi. Wireless communication with chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 110:184101, Apr 2013.
- [11] H. Sakai and H. Tokumaru. Autocorrelations of a certain chaos. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 28(5):588–590, Oct. 1980.