Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Controle de um Oscilador com Memória de Forma

Juliano G. Iossaqui[1]

Departamento Acadêmico de Engenharia Mecânica, UTFPR, Londrina, PR

Renato B. Bortolatto[2]

Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Londrina, PR

Resumo. Este trabalho propõe uma estratégia de controle por realimentação linearizante para o problema de controle da trajetória de deslocamento de um oscilador massa-mola-amortecedor com memória de forma. Em determinadas condições o oscilador com memória de forma apresenta comportamento caótico. A estratégia de controle proposta garante que a trajetória de deslocamento do oscilador converge para uma trajetória de referência com um erro que pode ser ajustado pela escolha adequada dos ganhos do controlador. Resultados numéricos mostram o desempenho da estratégia de controle.

Palavras-chave. Memória de forma, Caos, Controle ativo

1 Introdução

Nas últimas décadas o uso de materiais com memória de forma tem motivado grande número de estudos devido a sua grande diversidade de aplicações na área de automação e controle. Essas aplicações podem ser encontradas nos setores automotivo e aeroespacial, na indústria de equipamentos eletrônicos, em processos químicos e biomédicos [1]. Os materiais com memória de forma mais comuns e utilizados são ligas metálicas baseadas no ferro (Fe-Mn-Si), cobre (Cu-Zn-Al, Cu-Al-Ni) e níquel-titânio (nitinol). Os efeitos de memória de forma em ligas metálicas estão relacionados com a habilidade da liga em retornar para sua forma original quando submetidas a estímulos termomecânicos. O efeito memória de forma em ligas ocorre devido a mudança de temperatura e tensão na estrutura cristalina entre as fases martensítica (baixa temperatura) e austenítica (alta temperatura). Em geral, as aplicações de memória de forma podem ser caracterizadas pelas suas funções de geração de movimento (atuador) e armazenamento de energia de deformação.

Neste contexto, vários pesquisadores têm investigado o comportamento dinâmico de sistemas osciladores massa-mola-amortecedor com elemento de mola fabricado com liga de memória de forma [3]. As características dinâmicas de um oscilador massa-mola-amortecedor com memória de forma são obtidas por meio de uma solução analítica aproximada em [6]. Uma estratégia de controle linear ótimo é aplicada para controlar a trajetória

[1]julianoiossaqui@utfpr.edu.br
[2]rbortolatto@uftpr.edu.br

caótica de um oscilador massa-mola-amortecedor com memória de forma em [4]. A trajetória caótica de um oscilador massa-mola-amortecedor com memória de forma excitado por um motor de potência limitada é controlada em [5].

A estratégia de controle proposta em [4] garante a convergência da trajetória de deslocamento do oscilador para uma única trajetória de referência periódica obtida por meio de uma solução analítica aproximada que depende de informações precisas da amplitude e frequência da excitação ou perturbação. Este presente trabalho propõe uma estratégia de controle que garante a convergência da trajetória de deslocamento do oscilador para qualquer trajetória de referência suave e limitada. A estratégia de controle proposta não precisa de informações da amplitude e frequência da perturbação, somente do limitante para a amplitude. A Seção 2 apresenta o modelo matemático do oscilador com memória de forma. A Seção 3 apresenta a estratégia de controle do oscilador com memória de forma. A Seção 4 apresenta os resultados numéricos.

2 Modelo matemático do oscilador com memória de forma

A Figura 1 mostra a representação esquemática típica de um sistema oscilador massa-mola-amortecedor. Assume-se que o oscilador de massa m e amortecimento viscoso b possui mola de material com memória de forma representada pelo termo $k(x(t), \theta)$ que depende da posição $x(t)$ e da temperatura θ do oscilador. Também é assumido que o oscilador possui entrada de controle $u(t)$ com termo aditivo de perturbação $d(t)$.

Hipótese 2.1. *Para completa descrição do oscilador, assume-se que o termo aditivo de perturbação é dado pela seguinte função cossenoidal* $d(t) = M\cos(\omega t)$, $\forall\ t \geq 0$, *onde* M *é a amplitude da perturbação e* ω *é a freqüência da perturbação.*

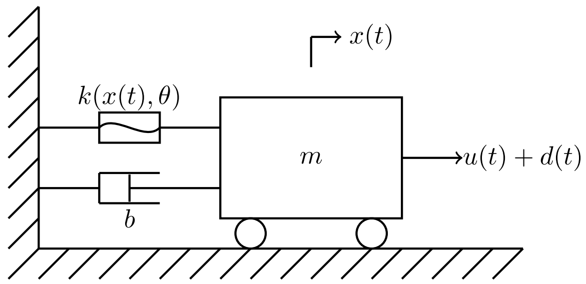

Figura 1: representação esquemática típica de um oscilador massa-mola-amortecedor.

Conforme [4], o movimento do oscilador massa-mola-amortecedor com memória de forma é dado por

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + k(x(t), \theta) = u(t) + d(t) \tag{1}$$

com

$$k(x(t), \theta) = \alpha(\theta - \theta_m)x(t) - \gamma x^3(t) + \epsilon x^5(t),$$

onde $\alpha = \dfrac{aA_r}{l}$, $\gamma = \dfrac{cA_r}{l^3}$ e $\epsilon = \dfrac{eA_r}{l^5}$ são termos que dependem da área A_r, do comprimento l e constantes a, c e e relacionadas ao material do oscilador.

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0033

3 Estratégia de controle do oscilador com memória de forma

O objetivo do problema de controle é projetar um lei de controle $u(t)$ para o oscilador massa-mola-amortecedor com memória de forma tal que

$$\lim_{t\to\infty} (x(t) - x_r(t)) = 0, \tag{2}$$

onde $x(t)$ é a trajetória de deslocamento do oscilador, dada pela Equação (1), e $x_r(t)$ é uma trajetória de referência.

Para garantir que a trajetória do oscilador $x(t)$ seguirá a trajetória de referência $x_r(t)$ é definido o erro

$$e(t) = x(t) - x_r(t). \tag{3}$$

Dessa forma, o objetivo do problema de controle, dada pela Equação (2), é atingido se o erro $e(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Em geral, para garantir que o erro $e(t)$ convirja para zero é necessário que o termo de perturbação $d(t)$ seja precisamente conhecido. Contudo, a determinação precisa do termo de perturbação não é um problema fácil. Uma alternativa é obter um erro $e(t)$ que seja o menor possível. Para isso, propõe-se o seguinte Teorema.

Teorema 3.1. *Considere a equação de movimento do oscilador dado pela Equação* (1) *com $d(t)$ sob condição da Hipótese 2.1. Considere $s(t)$ um erro auxiliar dado por*

$$s(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t) \tag{4}$$

com $\lambda > 0$ e erro $e(t)$ definido pela Equação (3)*. Seja $x_r(t)$ uma trajetória de referência dada por uma função suave que possui derivadas $\dot{x}_r(t)$ e $\ddot{x}_r(t)$. Então, a lei de controle*

$$u(t) = m(\ddot{x}_r(t) - \lambda\dot{e}(t)) - \Lambda s(t) + b\dot{x}(t) + k(x(t), \theta) \tag{5}$$

com $\Lambda > 0$, garante que o erro $e(t)$ é ultimamente limitado por $l_u = \dfrac{M}{\lambda\psi\Lambda\phi}$, onde $0 < \phi < 1$ e $0 < \psi < 1$.

Demonstração. Primeiro será demonstrado que o erro auxiliar $s(t)$ é ultimamente limitado e um valor para o limitante último será obtido. Em seguida, com base no limitante de $s(t)$ será mostrado que $e(t)$ também é ultimamente limitado.

Para demonstrar que o erro auxiliar $s(t)$ é limitado, considere a dinâmica do erro auxiliar $\dot{s}(t)$ obtida a partir da dinâmica do erro $\dot{e}(t)$ que, por sua vez, é obtida a partir da derivada em relação ao tempo da Equação (3). Substituindo a dinâmica do erro $\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_r(t)$ na Equação (4) tem-se $s(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_r(t) + \lambda e(t)$. Essa equação pode ser reescrita, definindo $\dot{x}_a(t) = \dot{x}_r(t) - \lambda e(t)$, como $s(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_a(t)$ cuja derivada fornece a dinâmica do erro auxiliar

$$\dot{s}(t) = \ddot{x}(t) - \ddot{x}_a(t). \tag{6}$$

Considerando a dinâmica do erro auxiliar $\dot{s}(t)$, dada pela Equação (6), a aplicação da lei de controle $u(t)$, dada pela Equação (5), na equação de movimento do oscilador, dada pela Equação (1), resulta no seguinte sistema em malha fechada

$$\dot{s}(t) = f(t, s(t)) = \frac{1}{m}\left(d(t) - \Lambda s(t)\right). \tag{7}$$

Note que a origem $s(t) = 0$ não é um ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada, dada pela Equação (7), uma vez que $d(t)$ não converge para zero quando $t \to \infty$. Então, vários teoremas da teoria de Lyapunov não são diretamente aplicados. Contudo, ainda é possível mostrar que a solução $s(t)$ é ultimamente limitada aplicando o Teorema A.1 (ver em Apêndice A).

Considere o domínio $D_1 = \mathbb{R}$ que contém a origem $s(t) = 0$ e a seguinte função de Lyapunov candidata $V_1(s(t)) : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$V_1(t) = \frac{1}{2}s^2(t)$$

cuja derivada, usando a dinâmica dada pela Equação (7), é dada por

$$\dot{V}_1(t) = -\frac{\Lambda}{m}s^2(t) + \frac{1}{m}s(t)d(t) \leq -\frac{\Lambda}{m}||s(t)||_2^2 + \frac{M}{m}||s(t)||_2.$$

Note que uma parte do termo negativo $-\dfrac{\Lambda}{m}||s(t)||_2^2$ pode ser usado para dominar o termo positivo $\dfrac{M}{m}||s(t)||_2$. Para isso, a desigualdade anterior é reescrita como

$$\dot{V}_1(t) \leq -(1-\phi)\frac{\Lambda}{m}||s(t)||_2^2 - \phi\frac{\Lambda}{m}||s(t)||_2^2 + \frac{M}{m}||s(t)||_2,$$

onde $0 < \phi < 1$. Então,

$$\dot{V}_1 \leq -(1-\phi)\frac{\Lambda}{m}||s(t)||_2^2, \quad \forall\ ||s(t)||_2 \geq \mu_s = \frac{M}{\Lambda\phi}.$$

A Desigualdade (9) do Teorema A.1 pode ser verificada com

$$w_1(||s(t)||_2) = w_2(||s(t)||_2) = \frac{1}{2}||s(t)||_2^2.$$

Dessa forma as funções w_1 e w_2 podem ser escritas como $w_1(r) = w_2(r) = r^2/2$. Então, a solução $s(t)$ é uniformemente ultimamente limitada e o limitante último $(l_u)_s$ é dado por

$$||s(t)||_2 \leq (l_u)_s = w_1^{-1}(w_2(\mu_s)) = \sqrt{2w_2(\mu_s)} = \frac{M}{\Lambda\phi}.$$

Aplicando novamente o Teorema A.1 para o sistema, dado pela Equação (4), pode-se mostrar que o erro $e(t)$ também é ultimamente limitado.

Considere o domínio $D_2 = \mathbb{R}$ que contém a origem $e(t) = 0$ e a seguinte função de Lyapunov candidata $V_2(e(t)) : D_2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$V_2(t) = \frac{1}{2}e^2(t)$$

cuja derivada, usando a dinâmica dada pela Equação (4) e o limitante $(l_u)_s = \dfrac{M}{\Lambda\phi}$, é dada por

$$\dot{V}_2(t) = -\lambda e^2(t) + e(t)s(t) \leq -\lambda||e(t)||_2^2 + ||e(t)||_2\frac{M}{\Lambda\phi}$$

que pode ser resumida (como foi feito para a dinâmica do erro auxiliar $s(t)$) a seguinte expressão

$$\dot{V}_2 \leq -(1-\psi)\lambda ||e(t)||_2^2, \quad \forall\ ||e(t)||_2 \geq \mu_e = \frac{M}{\lambda\psi\Lambda\phi},$$

onde $0 < \psi < 1$. Portanto, o erro $e(t)$ é uniformemente utlimamente limitado e o limitante $(l_u)_e$ é dado por

$$||e(t)||_2 \leq (l_u)_e = \frac{M}{\lambda\psi\Lambda\phi}.$$

□

4 Resultados numéricos

Os valores numéricos dos parâmetros do oscilador são dados por $m = 1,0$ kg, $b = 0,1$ N/m/s^2, $\alpha = 0,1$ Pa·m/K, $\gamma = 0,9$ Pa, $\epsilon = 0,1$ Pa, $\theta = 201,6$ K, $\theta_m = 288$ K, $M = 25$ m e $\omega = 1$ rad/s. Os ganhos do controlador são dados por $\lambda = 25$ e $\Lambda = 25$. As condições iniciais são dadas por $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$. O tempo total para as simulações computacionais é $t = 200$ s. A trajetória de referência é dada por $x_r(t) = 3\cos(0,5t)$.

A Figura 2 mostra a evolução temporal das trajetórias de deslocamento $x(t)$ e velocidade $\dot{x}(t)$. As curvas tracejadas representam as trajetórias de referência (TR), as curvas contínuas representam as trajetórias do oscilador sem controle (OS) e as curvas ponto-tracejadas representam as trajetórias do oscilador controlado (OC). Observe que tanto para o deslocamento quanto para a velocidade, as trajetórias obtidas pelo OS não são periódicas enquanto as trajetórias obtidas pelo OC seguem as trajetórias de referência cossenoidal. As janelas mostram a convergência das trajetórias obtidas pelo OS e OC.

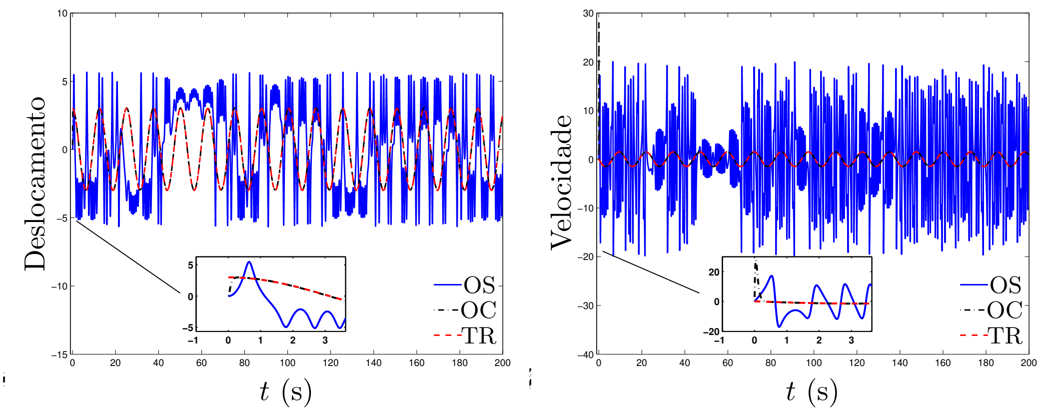

Figura 2: evolução temporal das trajetórias de deslocamento $x(t)$ e velocidade $\dot{x}(t)$.

A Figura 3 mostra a evolução temporal dos erros em deslocamento $x(t) - x_r(t)$ e velocidade $\dot{x}(t) - \dot{x}_r(t)$. As curvas contínuas representam os erros obtidos pelo oscilador sem controle OS e os erros obtidos pelo oscilador com controle OC. Note que os erros em deslocamento e velocidade obtidos pelo OC não tendem a zero. Os erros em deslocamento

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0033

e velocidade podem ser reduzidos aumentando os valores de ganhos λ e Λ. A Figura 4 mostra o plano de fase para o oscilador sem controle (OS) e para o oscilador com controle (OC). Note que a trajetória do oscilador com controle converge para uma órbita periódica enquanto a trajetória do oscilador sem contole apresenta uma órbita caótica.

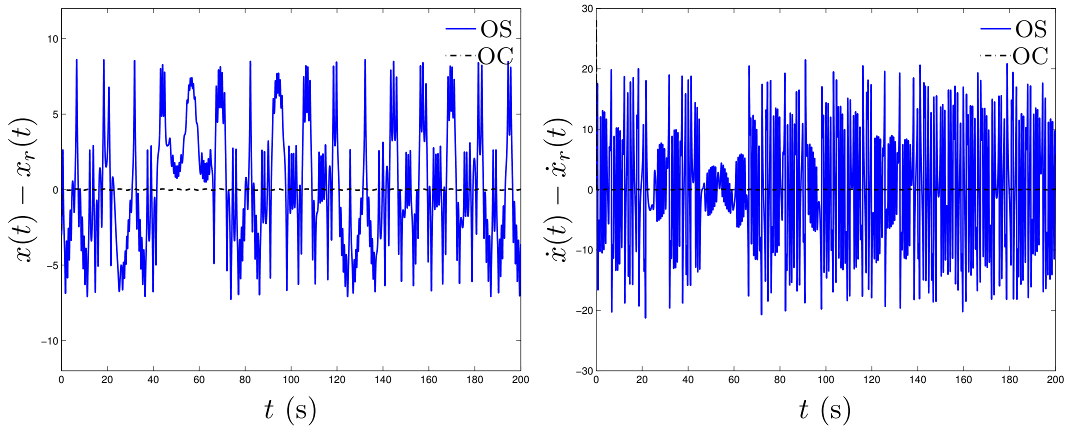

Figura 3: evolução temporal dos erros $x(t) - x_r(t)$ e $\dot{x}(t) - \dot{x}_r(t)$.

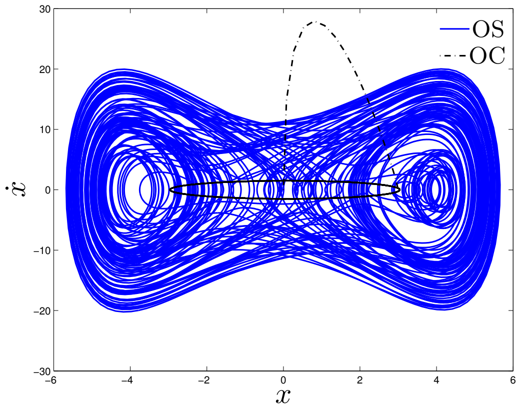

Figura 4: trajetória da posição vs. velocidade.

5 Conclusões

Este trabalho considera o problema de controle de trajetória de um oscilador com memória de forma. Uma lei de controle é proposta com base na técnica de realimentação linearizante. A convergência da trajetória de deslocamento do oscilador para a trajetória de referência é garantida usando a teoria de estabilidade de sistemas não autônomos perturbados. Simulações computacionais mostram o desempenho da estratégia de controle quando o oscilador apresenta comportamento caótico.

A Sistemas não autônomo

Considere o sistema não autônomo

$$\dot{s}(t) = f(t, s(t)), \tag{8}$$

onde $f : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}$ é contínuo por partes em t e localmente Lipschitz em $s(t)$ no domínio $[0, \infty) \times D$. A origem é um ponto de equilíbrio para o sistema não autônomo, dado pela Equação (8), em $t = 0$ se $f(t, 0) = 0, \ \forall \ t \geq 0$. A estabilidade do sistema não autônomo, dado pela Equação (8), pode ser analisada utilizando o seguinte teorema.

Teorema A.1. *[Teorema 4.18 de [2]] Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio que contém a origem $s(t) = 0$ e $V : [0, \infty] \times D \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que*

$$w_1(||s(t)||_2) \leq V(t, s(t)) \leq w_1(||s(t)||_2) \quad e \tag{9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s(t)} f(t, s(t)) \leq w_3(s(t)), \ \forall \ ||s(t)||_2 \geq \mu > 0,$$

$\forall \ t \geq 0$ e $\forall \ s \in D$, onde w_1 e w_2 são funções classe $\mathcal{K}$ (ver definição em [2]) e $w_3(s(t))$ é uma função positiva definida continua. Então, existe uma função classe $\mathcal{KL}$ (ver definição em [2]) e para toda condição inicial $s(t_0)$, satisfazendo $||x(t_0)||_2 \leq w_2^{-1}(w_1(r))$, existe $T \geq 0$ tal que a solução $s(t)$ satisfaz

$$||s(t)||_2 \leq v(||s(t_0)||_2, t - t_0), \ \forall \ t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad e$$

$$||s(t)||_2 \leq l_u = w_1^{-1}(w_2(\mu)), \ \forall \ t \geq t_0 + T.$$

Referências

[1] J. M. Jani, M. Leary, A. Subic and M. A. Gibson, A review of shape memory alloy research, applications and opportunities, Materials and Design, (2014), vol 56, 1078-1113.

[2] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, Third edition, Prentice-Hall, (2002).

[3] V. Piccirillo, J. M. Balthazar, B. R. Pontes Jr. and J. L. P. Felix, On a Nonlinear and chaotic non-ideal vibrating system with shape memory alloy (SMA), Journal of Theoretical and Applied Mechanics, (2008), vol 46., 597-620.

[4] V. Piccirillo, J. M. Balthazar and B. R. Pontes Jr., Chaos control of a nonlinear oscillator with shape memory alloy using an optimal linear control: Part I: Ideal energy source, Nonlinear Dyn., (2009), vol 55., 139-149.

[5] V. Piccirillo, J. M. Balthazar and B. R. Pontes Jr., Chaos control of a nonlinear oscillator with shape memory alloy using an optimal linear control: Part II: Nonideal energy source, Nonlinear Dyn., (2009), vol 56., 243-253.

[6] V. Piccirillo, J. M. Balthazar and B. R. Pontes Jr., Analytical study of the nonlinear behavior of a shape memory oscillator: Part I-primary resonance and free response at low temperatures, Nonlinear Dyn., (2010), vol 59., 733-746.

