

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Distância Topológica na Rede de Lucena

Darlan Araújo Moreira¹

Escola de Ciências e Tecnologia, UFRN, Natal, RN

Gilberto Corso²

Departamento de Biofísica e Farmacologia, Centro de Biociências, UFRN, Natal, RN

Resumo. A rede de Lucena é criada a partir de um objeto multifractal e classifica-se como livre de escala, hierárquica e planar. Neste trabalho mostramos que o comportamento da distância topológica da rede apresenta três regimes distintos que se classificam de acordo com o único parâmetro de criação da rede.

Palavras-chave. Sistemas Complexos, Redes Complexas, Multifractal

1 Introdução

A comunidade científica nos últimos anos tem despendido uma quantidade de esforço considerável no estudo de redes. Redes são modelos matemáticos utilizados para representar um conjunto e a interação entre seus elementos. Em tese, qualquer sistema pode ser modelado como uma rede. Conhecidas na matemática por grafos, as redes chamaram a atenção recentemente quando foi observado que muitos sistemas de naturezas distintas apresentavam características em comum quando representados em forma de redes. Como tais características eram distintas daquelas mais encontradas nos grafos e elas foram encontradas em uma vasta quantidade de sistemas diversos e complexos, tais como sistemas eletrônicos, biológicos, sociais, estas redes receberam a alcunha de redes complexas. Um dos estudos que mais chamou a atenção da comunidade científica para as redes complexas envolvia a distribuição das conexões entre páginas na internet. Em 1999, Albert, Joeng e Barabási [1] mostraram que, diferentemente do que se acreditava, a distribuição de conectividade dos links de páginas na *web* obedecia a uma lei de potência: as redes reais, naturais ou artificiais, por serem complexas, costumavam ser representadas por redes aleatórias, e portanto, suas distribuições de conectividades obedeciam à uma distribuição de Poisson. Desde aquele estudo, muitos outros sistemas reais mostraram-se possuidores de uma conectividade semelhante. Além da investigação de propriedades de rede reais, redes artificiais foram propostas para o auxílio no estudo de redes. Uma destas redes foi

¹darlan@ect.ufrn.br

²corso@cb.ufrn.br

construída a partir de um objeto multifractal [4]. Neste trabalho, descreveremos a construção do objeto multifractal, a construção da rede dele derivada (Rede de Lucena) e em seguida relataremos a investigação do comportamento da distância mínima média nestas redes.

2 O Multifractal

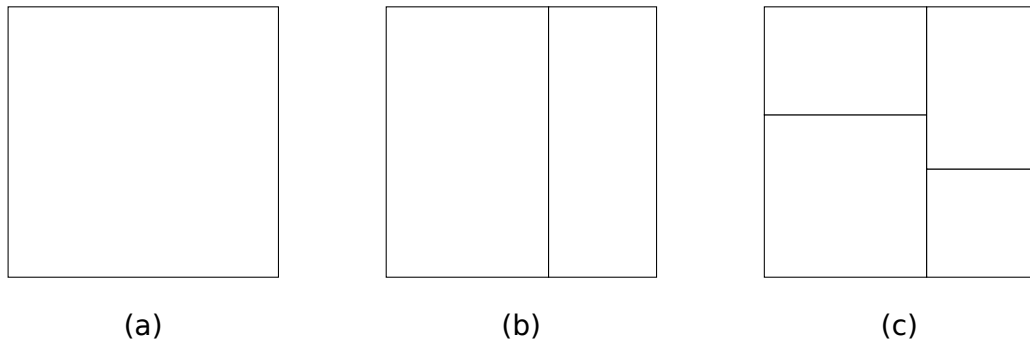


Figura 1: Criação da primeira geração do multifractal. (a) O quadrado. (b) Primeiro corte (c) Segundo e terceiro cortes resultando na primeira geração do multifractal.

O objeto multifractal é um conjunto cujos elementos podem ser agrupados em vários subconjuntos, cada qual com uma dimensão fractal própria. O multifractal utilizado neste trabalho foi construído a partir do particionamento de um objeto geométrico bidimensional: um quadrado. Seguiu-se o algoritmo descrito no trabalho de G. Corso et al [5]. Descreveremos brevemente os passos. Um quadrado de área \mathcal{A} sofrerá três cortes de tamanhos distintos que o transformará em um conjunto de quatro retângulos. O posicionamento dos cortes é determinado por um único parâmetro: ρ . Para simplificação do algoritmo de construção, este parâmetro será escolhido entre os números racionais pertencentes ao intervalo $[0, 1]$, o que permitirá escrevê-lo como uma fração própria $\rho = \frac{r}{s}$. O primeiro corte é feito verticalmente e a posição exata dele é encontrada considerando que o lado do retângulo é dividido em duas partes correspondendo às frações $\frac{r}{s+r}$ e $\frac{s}{s+r}$. Este primeiro corte levará ao surgimento de dois retângulos com áreas $\mathcal{B}_1 = \frac{r}{s+r}\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}_2 = \frac{s}{s+r}\mathcal{A}$, respectivamente, conforme ilustrado na figura 1 (b). Este procedimento de corte é repetido nos dois retângulos surgidos. Desta vez os cortes são horizontais e são feitos de forma alternada de tal maneira que eles não se transformem em um único corte de lado a lado. Este conjunto de quatro retângulos é chamado de primeira geração do multifractal. Repete-se o procedimento de corte em cada um dos retângulos, dando origem à segunda geração. Esse procedimento é repetido n vezes. É fácil perceber que a n -éssima geração é composta por 4^n retângulos.

3 A Rede

Redes são compostas por vértices (sítios) e arestas (ligações). A rede discutida neste trabalho surge a partir da consideração de que cada retângulo da n -ésima geração do multifractal é um vértice e da consideração de que ele está ligado a outro vértice (retângulo) desde que exista fronteira em comum entre eles. No algoritmo de construção da rede, a relação de vizinhança pode ser verificada através de uma análise de interseção entre as fronteiras dos retângulos. Para que esta tarefa torne-se mais facilmente realizável do ponto de vista computacional, a n -ésima geração do multifractal deve ser construída a partir do quadrado com lado de tamanho 2^n . Isto garantirá que as duas duplas (x, y) que localizam um retângulo no plano (um dupla indica a quina inferior esquerda do retângulo e a outra indica a quina superior direita) tenham x e y como elementos do conjunto dos números inteiros.

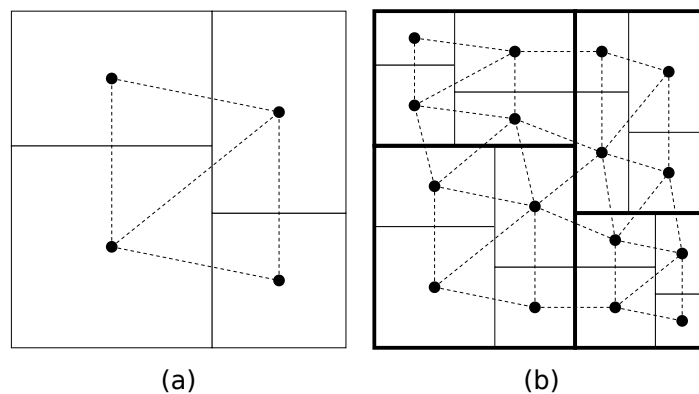


Figura 2: Redes criadas a partir da (a) primeira geração do multifractal e da (b) segunda geração do multifractal. Os vértices são os pontos nos centro do retângulo e as arestas são as linhas tracejadas.

Foi relatado num artigo publicado no ano de 2003 que a distribuição de conectividade desta rede segue uma lei de potência $P(k) \propto k^{-\gamma}$ com expoente γ não dependente da geração n , mas dependente do parâmetro de particionamento ρ do multifractal [4] (a conectividade de um vértice neste contexto pode ser resumido como sendo o número de ligações que ele possui). A existência desta lei de potência habilita a rede a ser classificada como livre de escala, no sentido de que não há grandezas típicas envolvidas quanto à conectividade dos vértices. Em um trabalho posterior [7] relatou-se que esta rede também classifica-se como sendo hierárquica, isto é, a distribuição dos coeficientes de aglomeração dos vértices em relação à conectividade também obedece a uma lei de potência, $C \sim k^\beta$, com $\beta = -1$. O coeficiente de aglomeração médio da rede é considerado alto, e próximo daquele encontrado em redes complexas reais, em torno 0.37 com uma pequena dependência em relação a ρ .

Decidimos investigar a distância topológica média porque ela compõe, junto com a conectividade, e o coeficiente de aglomeração o conjunto de medidas mais importantes

sobre a topologia de uma rede. A distribuição de conectividade ajuda a compreender, por exemplo, quão resistente é uma rede à retirada de seus componentes. Uma distribuição de conectividade do tipo lei de potência corresponde à uma rede mais resiliente, o que estudos sugerem ser verdade tanto quanto à internet [3] quanto às proteínas de uma determinada levedura (*Saccharomyces cerevisiae*). Nesta situação, é três vezes mais provável que a falta de uma proteína bem conectada venha levar a morte da célula do que a ausência de uma proteína pouco conectada [6]. As redes hierárquicas, além de se classificarem como livres de escala, possuem uma característica que não estava presente nos primeiros modelos de redes livres de escala, um alto valor de coeficiente médio de aglomeração e sua independência em relação ao tamanho da rede, sendo assim, um modelo mais próximo das redes complexas reais. Já a distância topológica média permite avaliar quão distantes estão os elementos da rede entre si, permitindo a avaliação de situações como velocidade de propagação de informações, no caso de uma rede de computadores, velocidade de propagação de doenças, opiniões, no caso de uma rede social. O primeiro modelo criado com o intuito de representar uma rede de pequeno mundo (uma rede com pequena distância entre seus nós) foi idealizado por Watts and Strogatz [9], no ano de 1998. No modelo proposto, a distância topológica média $\langle l \rangle$ cresce com o logaritmo do número de elementos da rede, o que leva a conclusão, afirmada no trabalho, de que uma epidemia se espalharia mais rapidamente numa rede de pequeno mundo do que numa rede regular.

4 Resultados

Para a investigação dos caminhos topológicos médios $\langle l \rangle$ na rede de Lucena, utilizamos o algoritmo de Dijkstra [8]. O algoritmo foi executado em redes criadas a partir da segunda geração do multifractal, redes com 16 vértices, até a décima geração, redes com 1048576 vértices. Realizamos a média sobre todos os pares de vértices e com isto conseguimos estabelecer uma relação entre $\langle l \rangle$ e N (número de vértices da rede). Observamos que as redes podem ser agrupadas em três regimes determinados pelo valor de ρ . Quando $\rho \geq 1/2$, temos o regime no qual $\langle l \rangle \propto N^\beta$. Quando $\rho \leq 1/12$, temos o regime em que $\langle l \rangle \propto (\log N)^\alpha$. Para o intervalo $1/12 < \rho < 1/2$, não foi possível estabelecer uma relação analítica cujos os dados se ajustassem consideravelmente bem, trata-se de um regime intermediário. Na tabela 1 são mostrados os resultados das tentativas de ajuste de curva para diversos ρ . O traço significa que a tentativa de ajustar os dados por aquela expressão mostrou-se infrutífera. Na figura 3 temos o resultado do ajuste de curvas para as redes criadas com $\rho = 9/10$, $\rho = 1/2$, $\rho = 1/12$ e $\rho = 1/24$.

5 Discussões

Redes construídas com $\rho \geq 1/2$, apesar de serem livres de escala, possuem uma quantidade considerável de vértices com conectividades típicas de redes regulares. No caso em questão, há muitos vértices com conectividade igual aos dos vértices de uma rede quadrada, $k = 4$. Isto implica que na medida em que o $\rho \rightarrow 1$, tem-se que $\langle l \rangle$ apresenta um comportamento semelhante àquele encontrado em uma rede regular. Note que para $\rho = 9/10$,

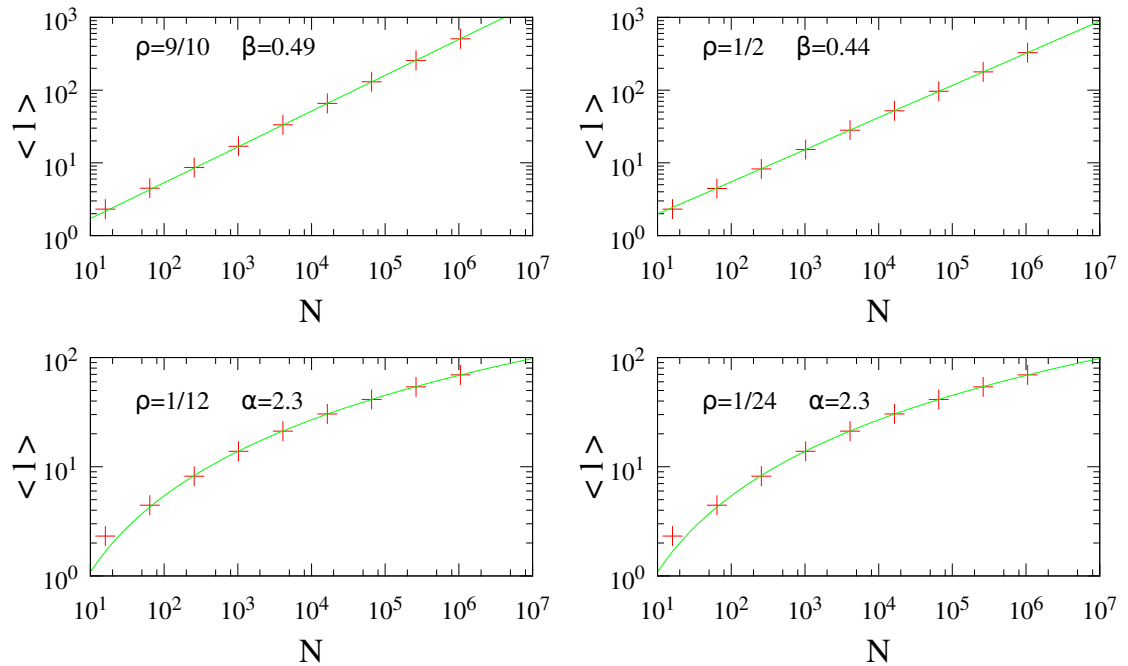


Figura 3: Ajuste de curvas da distância mínima média $\langle l \rangle$ vs N . Para $\rho = 9/10$ e $\rho = 1/2$ (gráficos na posição superior da figura) os ajustes foram realizado com $\langle l \rangle \propto N^\beta$ Para $\rho = 1/12$ e $\rho = 1/24$ (gráficos na posição inferior da figura) os ajustes foram realizado com $\langle l \rangle \propto (\log N)^\alpha$

encontramos a relação $\langle l \rangle \propto N^{0.49}$, que é muito próximo daquela esperada para a rede quadrada, $\langle l \rangle \propto \sqrt{N}$. Para $\rho \leq 1/24$, tem-se a seguinte relação: $\langle l \rangle \propto (\log N)^\alpha$. Nas redes de pequeno mundo esta relação é encontrada com α possuindo o valor de 1. Nós encontramos $\alpha = 2.3$, o que permite classificar a rede de Lucena contruída com $\rho \leq 1/12$ como sendo quase de pequeno mundo. Na região intermediária, a rede está mudando de regime: saindo do que vamos chamar de regime de grande mundo para o regime de quase pequeno mundo.

Conclusões

O comportamento da distância topológica da rede de Lucena depende do parâmetro de construção ρ . Existem três tipos de classificações para uma rede de Lucena. Rede de grande mundo, para $\rho \geq 1/2$, rede intermediária para $1/24 < \rho < 1/2$, rede de quase pequeno mundo para $\rho \leq 1/12$. Este comportamento, juntamente com outras características já conhecidas da rede de Lucena, como ser livre de escala, ser hierárquica, ser uma planar, possuir um alto coeficiente de aglomeração, aproximadamente 0.37, tornam essa rede uma candidata a modelar redes reais, tais como aquelas formadas pelos componentes de um circuito integrado, redes de distribuição de energia elétrica, etc.

Planejamos para breve a investigação da existência de um quarto regime: existiria

Tabela 1: Resultados da tentativas de ajuste das curvas. Traços significam que a tentativa de ajuste utilizando a função correspondente não teve sucesso.

ρ	$\langle l \rangle \sim (\log N)^\alpha$	$\langle l \rangle \sim N^\beta$
1/24	$\alpha = 2.3 \pm 0.1$	-
1/12	$\alpha = 2.3 \pm 0.1$	-
1/6	-	-
1/5	-	-
1/4	-	-
1/3	-	-
1/2	-	$\beta = 0.44 \pm 0.01$
3/5	-	$\beta = 0.45 \pm 0.01$
2/3	-	$\beta = 0.47 \pm 0.01$
3/4	-	$\beta = 0.48 \pm 0.01$
8/9	-	$\beta = 0.49 \pm 0.01$
9/10	-	$\beta = 0.49 \pm 0.01$

algum valor $\rho < 1/24$ a partir do qual a rede tornária-se de pequeno mundo na medida em que $\rho \rightarrow 0$? Planejamos também o estudo do comportamento da propagação da opinião, o estudo das propriedades do modelo de Ising e estudos de outros sistemas dinâmicos na rede de Lucena.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

- [1] R. Albert, H. Jeong and A.L. Barabasi, Diameter of the world wide web, *Nature*, vol. 401, 130–131, (1999), DOI:10.1038/43601.
- [2] A.L. Barabasi and R. Albert, Emergence of scaling in random networks, *Science*, vol. 286, 509–512, (1999), DOI:10.1126/science.286.5439.509.
- [3] R. Cohen, K. Erez, D. b.-Avraham and S. Havlin, Resilience of the internet to random breakdowns, *Phys. Rev. Lett.* vol. 85, 4626–4628, (2000), DOI:10.1103/PhysRevLett.85.4626.
- [4] G. Corso, J. E. Freitas, and L. S. Lucena, A multifractal scale-free lattice, *Physica A*, vol. 342, 214–220, (2004), DOI:10.1016/j.physa.2004.04.081.

- [5] G. Corso, J. E. Freitas, L. S. Lucena, and R. F. Soares, Percolation on a multifractal, *Phys. Rev. E*, vol. 69, 066135, (2004), DOI:10.1103/PhysRevE.69.066135.
- [6] H. Jeong, S. P. Mason and A.-L. Barabási, Lethality and centrality in protein networks, *Nature*, vol. 411, 41–42, (2001), DOI:10.1038/35075138.
- [7] D. A. Moreira, L. S. Lucena and G. Corso, Hierarchical coefficient of a multifractal based network, *Physica A*, vol. 396, 242–247, (2014), DOI: 10.1016/j.physa.2013.11.020.
- [8] R. Sedgewick and K. Wayne, *Algorithms*, 4th Ed., Addison-Wesley Professional, (2011)
- [9] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Collective dynamics of 'small-world' networks, *Nature*, vol 393. 440–442, (1998), DOI:10.1038/30918